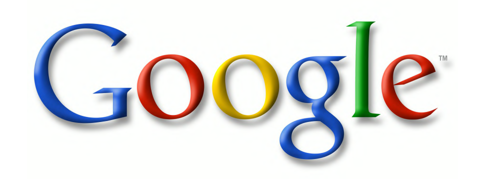
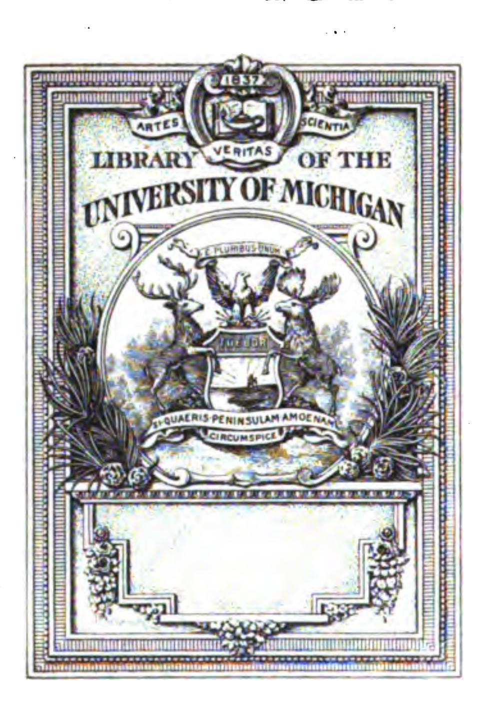





1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

DEUXIÈME SÉRIE.

1872.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Grands-Augustins, 55.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

RÉDIGÉ

PAR MM. GERONO,

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES,

ET

CH. BRISSE,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME ONZIÈME.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR MM. GERONO ET TERQUEM.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, n° 55.

1872.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

SUR L'ÉQUATION $x^3+y^3=z^3+u^3$;

PAR M. HERMITE.

On doit à Euler les formules suivantes, qui vérifient identiquement cette équation :

$$x=+(f^2+3g^2)^2-(ff'+3gg'+3fg'-3f'g)(f'^2+3g'^2),$$
$$y=-(f^2+3g^2)^2+(ff'+3gg'-3fg'+3f'g)(f'^2+3g'^2),$$
$$z=-(f'^2+3g'^2)^2+(ff'+3gg'-3fg'+3f'g)(f^2+3g^2),$$
$$u=+(f'^2+3g'^2)^2+(ff'+3gg'+3fg'-3f'g)(f^2+3g^2),$$

et M. Binet, dans une *Note sur une question relative à la théorie des nombres* (*Comptes rendus*, t. XII, p. 248), a observé qu'on pouvait, sans diminuer leur généralité, les réduire aux expressions plus simples :

$$x=+(a^2+3b^2)^2-a+3b,$$
$$y=-(a^2+3b^2)^2+a+3b,$$
$$z=+(a^2+3b^2)(a+3b)-1,$$
$$u=-(a^2+3b^2)(a-3b)+1,$$

où n'entrent que deux indéterminées a et b. Je me propose de tirer ces résultats comme une conséquence de la

propriété générale des surfaces du troisième ordre, consistant en ce que leurs points peuvent se déterminer individuellement. Soit donc $u = 1$; j'observe qu'en désignant par α une racine cubique imaginaire de l'unité, les droites

$$x = \alpha, \quad x = \alpha^2,$$
$$y = \alpha^2 z, \quad y = \alpha z$$

sont entièrement situées sur la surface

$$x^3 + y^3 = z^3 + 1.$$

Cela posé, une autre droite, représentée par les équations

$$x = az + b,$$
$$y = pz + q,$$

rencontrera chacune de ces génératrices, si l'on a les conditions

$$\frac{\alpha - b}{a} = \frac{q}{\alpha^2 - p},$$

$$\frac{\alpha^2 - b}{a} = \frac{q}{\alpha - p};$$

d'où l'on tire

$$p = b, \quad q = \frac{b^2 + b + 1}{a},$$

et les coordonnées z_1, z_2 des points de rencontre seront respectivement les quantités

$$z_1 = \frac{\alpha - b}{a},$$

$$z_2 = \frac{\alpha^2 - b}{a}.$$

Or l'équation

$$(az + b)^3 + (pz + q)^3 = z^3 + 1$$

devra admettre pour solutions

$$z = z_1, \quad z = z_2;$$

la troisième racine sera donc une fonction rationnelle des coefficients, qui s'obtient aisément comme il suit.

Développons l'équation en nous bornant aux termes en z^3 et z^2; nous en conclurons, pour la somme des racines, l'expression

$$z + z_1 + z_2 = 3\frac{a^2 b + p^2 q}{1 - a^3 - p^3}.$$

Mais on a

$$z_1 + z_2 = \frac{a + a^2 - 2b}{a} = -\frac{1 + 2b}{a};$$

donc

$$z = \frac{1 + 2b}{a} + 3\frac{a^2 b + p^2 q}{1 - a^3 - p^3}.$$

Il vient ensuite, si l'on remplace p et q par leurs valeurs en a et b,

$$z = \frac{(1 + b + b^2)^2 - a^3(1 - b)}{a(1 - a^3 - b^3)},$$

et de là résultent, pour x et y, les expressions

$$x = \frac{(1 + b + b^2)(1 + 2b) - a^3}{1 - a^3 - b^3},$$

$$y = \frac{(1 + b + b^2)^2 - a^3(1 + 2b)}{a(1 - a^3 - b^3)}.$$

Elles se simplifient, si l'on écrit, au lieu de a, $\frac{1}{a}$, et au lieu de b, $\frac{b}{a}$, en prenant ces nouvelles formes, savoir :

$$x = \frac{(a^2 + ab + b^2)(a + 2b) - 1}{a^3 - b^3 - 1},$$

$$y = \frac{(a^2 + ab + b^2)^2 - a - 2b}{a^3 - b^3 - 1},$$

$$z = \frac{(a^2 + ab + b^2)^2 - a + b}{a^3 - b^3 - 1};$$

et, en revenant à l'équation homogène

$$x^3 + y^3 = z^3 + u^3,$$

nous obtenons ainsi pour solution :

$$\begin{aligned}
x &= (a^2 + ab + b^2)(a + 2b) - 1,\\
y &= (a^2 + ab + b^2)^2 - a - 2b,\\
z &= (a^2 + ab + b^2)^2 - a + b,\\
u &= a^3 - b^3 - 1 = (a^2 + ab + b^2)(a - b) - 1.
\end{aligned}$$

Or il suffit maintenant de changer b en $2b$ et a en $a - b$ pour que ces formules deviennent

$$\begin{aligned}
x &= (a^2 + 3b^2)(a + 3b) - 1,\\
y &= (a^2 + 3b^2)^2 - a - 3b,\\
z &= (a^2 + 3b^2)^2 - a + 3b,\\
u &= (a^2 + 3b^2)(a - 3b) - 1.
\end{aligned}$$

Ce sont précisément celles d'Euler, sauf que x, y, z, u sont remplacés par z, $-y$, x, et $-u$.

SUR LE NOMBRE DE NORMALES RÉELLES QUE L'ON PEUT MENER D'UN POINT DONNÉ A UN ELLIPSOÏDE

(suite, voir 2e série, t. IX, p. 481);

Par JOACHIMSTHAL.

Partageons l'intervalle entre $-\infty$ et $+\infty$ en intervalles plus petits, entre lesquels on puisse facilement, au moyen de l'équation (14), déterminer le signe de θ.

On obtient le tableau suivant, où nous avons désigné

par une étoile le signe des quantités qui n'est pas déterminé par les tableaux (15) et (16).

I. $b > \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$.

	1		2		3		4		5		6		7	
u	$-\infty$	$c-\iota$	$c+\iota$	β	β	$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)-\iota$	$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\iota$	$b-\iota$	$b+\iota$	α	α	$a-\iota$	$a+\iota$	$+\infty$
φ	+	+	+	—	—	*	*	+	+	—	—	+	+	+
φ'	—	—	—	*	*	+	+	—	—	*	*	+	+	+
θ	—	—	+	+	+	+	—	—	+	+	+	+	—	—

D'après le lemme donné plus haut, on voit que, dans les intervalles 1 et 7, il n'y a aucune racine; dans chacun des intervalles 2, 5 et 6, il s'en trouve une, de quelque façon que l'on choisisse le signe indéterminé. Dans chacun des intervalles 3 et 4, il y a au plus une racine; de sorte que, entre β et b [en supposant que $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$ ne soit pas une racine], il y a un nombre de racines égal à 0, à 1 ou à 2.

Comme $\varphi(\beta)$ et $\varphi(b)$ sont de signes contraires, il y a exactement une racine dans cet intervalle. Si $\frac{\alpha+\beta}{2}$ est racine, cette racine ne peut être que simple, puisque l'on a

$$\varphi'\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > 0.$$

On a alors le schema suivant :

	3		4	
u	β	$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)-\iota$	$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\iota$	$b-\iota$
φ	—	—	+	+
φ'	*	+	+	—
θ	+	+	—	—

Ces deux intervalles ne comprenant aucune racine, il n'y a entre β et b qu'une seule racine, comme dans le cas précédent, et cette racine est $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$.

II. $b<\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$.

On a aussi à distinguer sept intervalles, desquels 1, 2, 6 et 7 sont identiques avec les précédents; les trois autres sont

	3		4		5	
u	β	$b-\varepsilon$	$b+\varepsilon$	$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)-\varepsilon$	$\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\varepsilon$	α
φ	—	+	+	*	*	—
φ'	*	+	+	—	—	*
θ	+	+	—	—	+	+

Il y a une racine comprise dans l'intervalle 3, une dans l'ensemble des intervalles 4 et 5; le cas où $\varphi\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=0$ se résout comme ci-dessus.

III. $b=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$.

Dans ce cas, $\theta=-\frac{1}{2}(u-a)(u-c)$ est positif, quand u est compris entre a et c; hors de ces limites, il est négatif.

On a à distinguer les intervalles de $-\infty$ à $c-\varepsilon$, de $c+\varepsilon$ à $b-\varepsilon$, de $b+\varepsilon$ à $a-\varepsilon$ et de $a+\varepsilon$ à $+\infty$. Les intervalles extrêmes sont identiques avec ceux désignés précédemment par 1 et 7, et ils ne contiennent aucune racine.

Les deux autres donnent le tableau suivant :

u	$c+\varepsilon$	$b-\varepsilon$	$b+\varepsilon$	$a-\varepsilon$
φ	+	+	+	+
φ'	—	*	*	+
θ	+	+	+	+

Chacun des intervalles contient au plus deux racines, et il les contient réellement, car on a

$$\varphi(c)=+,\quad \varphi(\beta)=-,\quad \varphi(b)=+,\quad \varphi(\alpha)=-,\quad \varphi(a)=+.$$

L'équation $\varphi(u)=0$ [ou l'équation (10)] a donc en tout quatre racines réelles, comprises entre les limites c et β, β et b, b et α, α et a, et chacune de ces racines est simple.

Remarque. — L'équation $\varphi(u)=0$ mériterait peut-être, à d'autres points de vue, une discussion plus approfondie.

Dans le plan, on a l'équation analogue

$$2\left[\frac{1}{(u-a)^2}+\frac{1}{(u-b)^2}-\frac{1}{(u-\alpha)^2}\right] - \left(\frac{1}{u-a}+\frac{1}{u-b}-\frac{1}{u-\alpha}\right)^2=0,$$

à laquelle on peut étendre de différentes façons les résultats obtenus ci-dessus.

L'invariant quadratique J de cette équation (*) est identiquement nul; si l'on exprime cet invariant par les racines ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 de l'équation du quatrième degré, on a

$$J=\Sigma(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2(\varepsilon_3-\varepsilon_4)^2=0\ (^{**}),$$

relation qui, pour une équation du quatrième degré à coefficients réels, suppose deux racines réelles et deux imaginaires.

(*) *Voir* la Note placée à la fin du Mémoire.

(**) Voir *Leçons d'Algèbre supérieure* par G. Salmon, p. 172 et 180. Chez Gauthier-Villars; prix : 7 fr. 50 c.

Le même invariant s'évanouit pour l'équation suivante :

$$2\left[\frac{1}{(u-a)^2}+\frac{1}{(u-b)^2}+\frac{1}{(u-c)^2}-\frac{1}{(u-\alpha)^2}\right] - \left(\frac{1}{u-a}+\frac{1}{u-b}+\frac{1}{u-c}-\frac{1}{u-\alpha}\right)^2=0.$$

IV.

Appelons u_1, u_2, u_3 et u_4 les racines de l'équation $\varphi(u)=0$, ces racines étant rangées par ordre de grandeur, en sorte que u_4 soit la plus grande; désignons par v_1, v_2, v_3 et v_4 les valeurs correspondantes de v définies par l'équation

$$(6)\quad \frac{2}{u-v}=\frac{1}{u-a}+\frac{1}{u-b}+\frac{1}{u-c}-\frac{1}{u-\alpha}-\frac{1}{u-\beta}.$$

Pour $u=-\infty$, on a $v=+\infty$; quand u croît, v commence par décroître, v_1 et v_3 sont des minima, et v_2 et v_4 des maxima, et l'on a

$$(17)\quad \left\{\begin{array}{l} v_1<v_2,\quad v_3<v_2,\quad v_3<v_4 \\ \text{et, d'après (9),} \\ v_1<\beta,\quad v_2>\beta,\quad v_3<\alpha,\quad v_4>\alpha; \\ \text{d'où}\quad v_4>v_1. \end{array}\right.$$

Portons sur la normale donnée, à partir du pied de cette normale (x_0, y_0, z_0), et dans un sens convenable, les longueurs

$$\frac{\alpha}{\pi},\quad \frac{\beta}{\pi},\quad \frac{v_1}{\pi},\quad \frac{v_2}{\pi},\quad \frac{v_3}{\pi},\quad \frac{v_4}{\pi}\quad (\textit{voir } \text{I}),$$

et désignons les extrémités de ces longueurs par

$$(\alpha),\quad (\beta),\quad (v_1),\ldots.$$

D'après (17), ces points ont leurs positions relatives indiquées par le tableau suivant :

$$(-\infty)(\nu_1)(\beta)(\nu_2)(+\infty),$$
$$(-\infty)(\nu_3)(\alpha)(\nu_4)(+\infty),$$
$$(-\infty)(\nu_3)(\nu_2)(+\infty),$$
$$(-\infty)(\nu_1)(\nu_4)(+\infty).$$

Les points (ν_1), (ν_2), (ν_3) et (ν_4), qui partagent en cinq parties la normale, ne peuvent offrir que les quatre dispositions suivantes :

$$(17^*)\quad \begin{cases} (-\infty)(\nu_1)(\nu_3)(\nu_2)(\nu_4)(+\infty), \\ (-\infty)(\nu_1)(\nu_3)(\nu_4)(\nu_2)(+\infty), \\ (-\infty)(\nu_3)(\nu_1)(\nu_4)(\nu_2)(+\infty), \\ (-\infty)(\nu_3)(\nu_1)(\nu_2)(\nu_4)(+\infty). \end{cases}$$

Les deux segments $\overline{(\nu_1)(\nu_2)}$ et $\overline{(\nu_3)(\nu_4)}$ empiètent donc l'un sur l'autre, ou bien l'un est contenu dans l'autre.

Quand u croît de $-\infty$ à $+\infty$, ν varie d'une façon continue de $+\infty$ à ν_1, de ν_1 à ν_2, de ν_2 à ν_3, de ν_3 à ν_4 et de ν_4 à $-\infty$.

En se reportant au tableau précédent, on voit qu'en même temps le point (ν), extrémité de la longueur $\frac{\nu}{\pi}$, parcourt une fois les deux segments extrêmes (ceux qui s'étendent à l'infini), trois fois les segments intérieurs adjacents à ceux-ci et cinq fois le segment médial.

En appliquant ces résultats à la question proposée, nous arrivons à la conclusion suivante :

D'un point (ξ, η, ζ) de la normale donnée, on peut encore mener à l'ellipsoïde un nombre de normales réelles égal à cinq, à trois ou à un, suivant que le point (ξ, η, ζ) se trouve sur les deux segments $\overline{(\nu_1)(\nu_2)}$ et $\overline{(\nu_3)(\nu_4)}$, ou sur l'un d'eux seulement, ou enfin ne se trouve sur aucun d'eux.

Quelques formules relatives à l'ellipsoïde permettent d'exprimer simplement ces résultats ; nous allons d'abord établir ces formules.

(*La suite prochainement.*)

MÉMOIRE SUR L'EMPLOI DES IMAGINAIRES DANS LA GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE (*) ;

PAR M. LAGUERRE.

I. *Généralités sur les surfaces à génératrices circulaires.*

1. On sait, depuis les travaux de Poncelet, que tous les cercles tracés dans un même plan passent par deux points fixes imaginaires situés sur la droite de l'infini. Je désignerai par I et J ces deux points remarquables que, dans une Note publiée dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (janvier 1865), j'ai proposé de nommer *ombilics du plan*. J'appelle *droite isotrope* toute droite du plan considéré qui passe par l'un des points I et J ; l'ensemble de ces droites forme deux systèmes bien distincts, l'un composé de droites parallèles entre elles et passant par le point I, l'autre de droites également parallèles et passant par le point J.

Par tout point d'un plan passent deux droites isotropes de systèmes différents, dont l'ensemble forme un cercle de rayon nul. Dans un plan réel, toute droite isotrope renferme un point réel et n'en renferme évidem-

(*) Une Note de l'auteur, sur le même sujet, a paru dans le journal *l'Institut*, n° 1898.

ment qu'un ; c'est le point où elle coupe la droite isotrope qui lui est imaginairement conjuguée (*).

Si, par un point fixe, réel ou imaginaire, on mène divers plans, chacun de ces plans contient deux droites isotropes passant par le point fixe. Les droites ainsi obtenues sont situées sur un même cône du second degré, que l'on peut aussi considérer comme une sphère de rayon nul ayant pour centre le point fixe et qui jouit de toutes les propriétés de la sphère. Ainsi, par exemple, toute section plane de ce cône est un cercle, et le centre du cercle est le pied de la perpendiculaire abaissée du sommet du cône sur le plan.

Je désignerai sous le nom de *cône isotrope* le cône ainsi formé par toutes les droites isotropes qui passent par un même point. Tous les cônes isotropes coupent le plan de l'infini suivant une même conique, commune à toutes les sphères tracées dans l'espace et que l'on peut appeler l'*ombilicale*.

Par une droite, on peut généralement mener deux plans tangents à l'ombilicale; j'appellerai ces plans *plans isotropes*. Le couple de plans isotropes, passant par une droite donnée, est coupé par un plan perpendiculaire à cette droite suivant deux droites isotropes. Par une droite isotrope, on ne peut faire passer qu'un seul plan isotrope, puisque cette droite coupe le plan de l'infini en un point de l'ombilicale.

(*) Je dis que deux points sont imaginairement conjugués, lorsque leurs coordonnées, prises par rapport à un système d'axes réels quelconque, sont des quantités imaginaires conjuguées. Un point réel est à lui-même son conjugué.

Deux courbes sont imaginairement conjuguées, lorsque les équations de chacune d'elles se déduisent des équations de l'autre en changeant le signe du symbole imaginaire i.

Une courbe réelle est à elle-même sa propre conjuguée.

2. Ces définitions établies, concevons un point imaginaire de l'espace a, et le point a' qui lui est imaginairement conjugué. Par chacun de ces points passe un cône isotrope; les deux cônes ainsi obtenus se coupent suivant un cercle réel A, dont le plan est perpendiculaire à la droite réelle qui joint les deux points imaginairement conjugués a et a' : le centre de ce cercle est le point réel O, qui est le milieu du segment aa', et, la distance Oa étant représentée par Ri, son rayon a pour valeur la grandeur réelle R.

Il est clair que les deux points imaginaires a et a' déterminent complétement le cercle A; réciproquement, étant donné le cercle réel A, par ce cercle on ne peut faire passer que deux cônes isotropes dont les sommets sont les points a et a'. La position de ce cercle dans l'espace détermine donc complétement ces deux points.

Je dirai que le cercle réel A, ainsi déterminé, est le *cercle représentatif* du couple de points imaginaires a et a', couple que je désignerai par la notation (A); réciproquement, le cercle A, déterminé comme précédemment par les deux points a et a', sera désigné par la notation (a, a').

Le cercle A ou (a, a') représente ainsi l'ensemble des deux points imaginaires conjugués a et a'; dans certaines questions, il est nécessaire de pouvoir distinguer ces deux points l'un de l'autre. A cet effet, on peut imaginer que le cercle A soit décrit dans un certain sens par un point mobile; le sens dans lequel il sera supposé décrit déterminera celui des deux points a et a' dont il sera la représentation. Afin de fixer les idées, supposons que dans un système de coordonnées quelconque, mais d'ailleurs réel, les coordonnées d'un point m soient respectivement

$$x = a + \alpha i, \quad y = b + \beta i, \quad z = c + \gamma i;$$

le sens dans lequel on supposera décrit le cercle représentatif du point m sera tel qu'un spectateur, ayant l'œil placé à l'origine des coordonnées, voie le point mobile, décrivant le cercle, se mouvoir dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre ou en sens inverse, suivant que la quantité $a\alpha + b\beta + c\gamma$ est positive ou négative.

Il est évident d'ailleurs que, si cette quantité a un signe donné pour le point m, elle aura le signe contraire pour le point imaginairement conjugué m', dont les coordonnées sont

$$x = a - \alpha i, \quad y = b - \beta i, \quad z = c - \gamma i.$$

3. Dans la plupart des recherches de géométrie, on a à considérer, par couples, des points réels ou qui ne sont pas imaginairement conjugués. J'étendrai à ce cas les notions établies précédemment. Ainsi, a et b désignant deux points quelconques de l'espace, je désignerai par (a, b) le cercle qui résulte de l'intersection des cônes isotropes ayant pour sommets ces deux points ; ce cercle sera généralement imaginaire et ne deviendra réel que dans le cas, examiné précédemment, où les points considérés sont imaginairement conjugués. De même, C désignant un cercle quelconque de l'espace, je dénoterai par le symbole (C) les deux points qui sont les sommets des cônes isotropes passant par ce cercle.

4. Considérons dans l'espace une courbe géométrique quelconque, réelle ou du moins (pour le moment, je me restreindrai à ce cas de beaucoup le plus intéressant) définie par des équations réelles ; c'est-à-dire telle que, lorsqu'elle passe par un point imaginaire, elle passe également par le point imaginairement conjugué.

Étant donné un cercle réel de l'espace, ce cercle

représente un couple de points imaginairement conjugués; et, pour que ces points appartiennent à la courbe donnée, il est nécessaire que le cercle satisfasse à certaines conditions déterminées par la nature de la courbe et dont l'étude forme, pour ainsi dire, un prolongement géométrique de la théorie de cette courbe elle-même. Pour éclaircir ces considérations générales et montrer les diverses questions auxquelles elles se rattachent, j'en ferai tout d'abord, et avec quelques détails, l'application aux courbes gauches qui résultent de l'intersection d'une sphère et d'une surface du second ordre, en m'appuyant sur les propriétés connues des surfaces *anallagmatiques*.

5. M. Moutard a appelé surfaces anallagmatiques du quatrième ordre des surfaces qui peuvent être regardées comme l'enveloppe de sphères mobiles qui coupent orthogonalement une sphère fixe, tandis que leurs centres décrivent une surface du second degré; dans tout ce qui suit, je les désignerai simplement sous le nom de surfaces anallagmatiques; leur degré, qui est, en général, le quatrième, peut d'ailleurs s'abaisser au troisième, lorsque la surface lieu des centres des sphères mobiles est un paraboloïde, et même au second, puisque les surfaces du second degré sont comprises dans la famille des surfaces anallagmatiques.

La définition donnée ci-dessus peut être légèrement modifiée de la façon suivante. Étant donnés une sphère fixe S et un plan quelconque P coupant cette sphère suivant un cercle C, on peut, par ce cercle, faire passer deux cônes isotropes. Soient p et p' les sommets de ces cônes; ces deux points, qui, d'après ce que j'ai dit ci-dessus, pourraient être représentés par la notation (C), sont réciproques par rapport à la sphère S; pour abréger le discours, je dirai que ces deux points sont associés au

plan P et, réciproquement, que le plan P est le plan associé aux points p et p' (*).

Cela posé, on peut définir une surface anallagmatique donnée R comme le lieu des points associés, par rapport à une sphère fixe S, des différents plans que l'on peut mener tangentiellement à une surface du second degré A. L'intersection des surfaces S et A est une biquadratique F qui est l'une des cinq focales de la surface; les quatre autres focales correspondent aux quatre modes de génération dont la surface est susceptible (**). En chaque point m de la surface anallagmatique, la normale passe par le point où le plan associé au point m touche la surface A.

Soit G une génératrice rectiligne de cette dernière surface, et soient a, a' les points où cette génératrice s'appuie sur la focale F. On voit facilement que, tandis que le plan mobile qui sert à décrire la surface se déplace le long de la droite G en tournant autour de cette droite, les points associés au plan tangent dans ses diverses positions décrivent un cercle; et ce cercle est précisément l'intersection des deux cônes isotropes ayant pour sommets les points a et a', cercle que nous pouvons désigner par la notation (a, a'). A chaque génératrice rectiligne de A correspond donc une génératrice circulaire de R; et, comme chacun des plans tangents à la surface A passe par une génératrice rectiligne de même système que G, on voit que la surface anallagmatique peut être considérée comme engendrée par les différents cercles correspondant aux génératrices du même système que G. Aux génératrices rectilignes de A, du système différent de

(*) Voir, *Bulletin de la Société Philomathique* (mars 1868), ma Note sur les sections circulaires des surfaces anallagmatiques.

(**) Voir, *Bulletin de la Société Philomathique* (janvier 1868), ma Note sur quelques propriétés des surfaces anallagmatiques.

celui de G, correspond un autre système de sections circulaires de R; les deux systèmes ainsi obtenus forment un groupe de cercles que, pour plus de clarté, je dirai appartenir au mode de génération défini par la focale F, ou simplement à la focale F. A chacun des quatre autres modes de génération de la surface correspond un autre groupe de cercles situés sur la surface et appartenant à la focale définissant le mode de génération considéré. On peut donc définir, de la façon suivante, les surfaces anallagmatiques au moyen de leurs sections circulaires.

Étant donnée une biquadratique sphérique F, si l'on fait passer par cette courbe une surface du second degré quelconque et si, pour chaque génératrice rectiligne d'un système donné de cette surface, on construit le cercle qui résulte de l'intersection des cônes isotropes, ayant pour sommets les points où cette génératrice s'appuie sur la courbe, le lieu des cercles ainsi obtenus est une surface anallagmatique ayant F pour focale; et le système formé par ces cercles appartient à cette focale.

6. Dans ce qui précède, je n'ai fait aucune hypothèse sur la nature de la surface A, non plus que sur sa position relative par rapport à la sphère S. Les génératrices rectilignes de A peuvent être imaginaires, ou bien, étant réelles, elles peuvent traverser la sphère et la couper en deux points réels. Dans ces deux cas, les sections circulaires correspondantes de l'anallagmatique sont imaginaires. Pour qu'un cercle C, correspondant à une génératrice rectiligne, soit réel, il faut et il suffit évidemment que cette génératrice soit réelle et extérieure à la sphère; elle coupe alors cette sphère en deux points imaginairement conjugués de la focale F, et le cercle C est ce que j'ai appelé le *cercle représentatif* de ces deux points.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Lorsqu'un système de sections circulaires d'une surface anallagmatique, appartenant à une focale F de cette surface, est réel, les points imaginaires représentés par ces cercles sont situés sur la courbe F.

Si l'on imagine toutes les surfaces anallagmatiques, qui ont pour focale une biquadratique sphérique donnée F, et toutes les sections circulaires réelles de ces surfaces qui appartiennent à F, on obtiendra les cercles représentatifs de tous les points imaginaires de la courbe F. En effet, si un cercle C représente un point imaginaire de F, la droite réelle qui joint les points imaginaires (C), détermine avec la courbe F un hyperboloïde à une nappe, et cet hyperboloïde détermine une surface anallagmatique ayant F pour focale et passant par le cercle C. D'où la conclusion suivante :

Pour qu'un cercle réel représente un couple de points imaginaires situés sur une biquadratique sphérique donnée F, *il faut et il suffit que ce cercle soit situé sur une surface anallagmatique ayant* F *pour focale et qu'il appartienne au mode de description caractérisé par cette focale.*

(*La suite prochainement.*)

MÉMOIRE SUR LA THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DES COURBES DU TROISIÈME ORDRE ;

Par M. KOEHLER.

Si l'on conçoit un faisceau de coniques passant par quatre points, un faisceau de droites pivotant autour d'un autre point du plan et lié anharmoniquement au premier, le lieu de leurs intersections est une courbe du

troisième ordre. Ce théorème constitue la véritable définition géométrique de ces courbes, et permet d'établir toute leur théorie au moyen des seules ressources de la géométrie pure, en se servant des propriétés des lignes d'ordre inférieur. C'est ainsi que la théorie des coniques peut être déduite de leur génération par deux faisceaux homographiques de droites (*Traité des sections coniques* de M. Chasles).

En premier lieu, je rappellerai la méthode donnée par M. Chasles pour construire une cubique déterminée par neuf points *a*, *b*, *c*,..., *i*. Je prends arbitrairement quatre des points donnés *a*, *b*, *c*, *d* pour servir de *base* au faisceau des coniques génératrices; je circonscris au quadrilatère *efgh* une conique C capable du rapport anharmonique des quatre coniques *abcde*, *abcdf*, *abcdg*, *abcdh*; puis au quadrilatère *efgi* une conique C′ capable du rapport (*abcde*, *abcdf*, *abcdg*, *abcdi*); C, C′, qui ont déjà trois points communs *efg*, se coupent en un quatrième point P, toujours réel, qui sera un dixième point de la courbe demandée, et le *pivot* du faisceau de rayons. Il est clair, en effet, que le faisceau P(*e*, *f*, *g*, *h*, *i*) est homographique au faisceau des polaires d'un point quelconque par rapport aux coniques *abcd*(*e*, *f*, *g*, *h*, *i*).

Cette construction met en évidence la nécessité de se donner neuf points pour déterminer une cubique.

I. Toutes les cubiques passant par huit points donnés *a*, *b*, *c*, . . . , *h* passent par un même neuvième point.

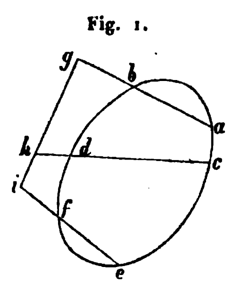
abcd étant la base des coniques, soient P, P′ les pivots correspondants aux deux cubiques *abc*. . .*hi*, *abc*. . .*hi′*. Ces deux points sont sur la conique C circonscrite à *efgh* et capable du rapport anharmonique *abcd*(*e*, *f*, *g*, *h*). Il est évident que, si *abc*. . .*hi* et *abc*. . .*hi′* ont d'autres points communs, ils seront situés sur cette conique C;

car les rayons tels que Px, P'x menés à l'un de ces points appartiendront aux faisceaux homographiques qui ont leurs sommets en P, P', et dont on a déjà quatre couples de rayons correspondants, savoir : P(e, f, g, h), P'(e, f, g, h). Prenons pour base *abce*; on verra de même que les points communs appartiennent à la conique C_1, circonscrite à *dfgh* et capable du rapport anharmonique *abce*(d, f, g, h). C et C_1 se coupent en un quatrième point k, toujours réel; k appartiendra aux deux cubiques, et, comme il ne dépend en aucune façon des neuvièmes points i et i', le théorème est démontré.

La construction du neuvième point d'intersection k conduit, ainsi que je le montrerai plus loin, à plusieurs propriétés fondamentales des cubiques, lorsqu'on donne aux huit premiers points des positions particulières.

II. Si, parmi les neuf intersections d'une cubique avec trois droites quelconques, six points appartiennent à une conique, les trois autres sont en ligne droite.

Fig. 1.



Soient a, b, c, d, e, f, g, h huit points répartis, comme l'indique la *fig.* 1, sur trois droites quelconques, les six premiers appartenant à une même conique. Parmi les cubiques qui passent par ces huit points, il y en a deux qui passent en i, savoir : la cubique composée des trois

droites *ab*, *cd*, *ef*, et celle qui se réduit à la conique donnée et à la droite *gh*. Toutes les autres passent donc en *i*. Le système des droites *ab*, *cd*, *ef* peut se concevoir comme engendré en prenant pour base *abcd*, et *i* pour pivot; il en est de même pour le système de la droite *gh* et de la conique. Dans le premier cas, à la conique (*ab*, *cd*) correspond le rayon *ihg*, à toutes les autres coniques du faisceau correspond le rayon unique *ife*; l'inverse a lieu dans le second cas.

Autrement. — Supposons une cubique définie par les six points *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* sur une conique, et par trois points quelconques *l*, *m*, *n*. Soit *abcd* la base. La conique C circonscrite au quadrilatère *lmne* et capable du rapport *abcd*(*l*, *m*, *n*, *e*), la conique C′ circonscrite à *lmnf* et capable du rapport *abcd*(*l*, *m*, *n*, *f*) donnent le pivot *i* par leur quatrième intersection; mais les deux rapports anharmoniques sont égaux, puisque les deux coniques *abcde*, *abcdf* coïncident; on en conclut que la quatrième intersection *i* est sur la droite *ef*. Considérons la conique du faisceau réduite au système (*ab*, *cd*); le rayon correspondant issu de *i* la rencontrera en deux points *g*, *h*, qui appartiendront, ainsi que *i*, à la cubique.

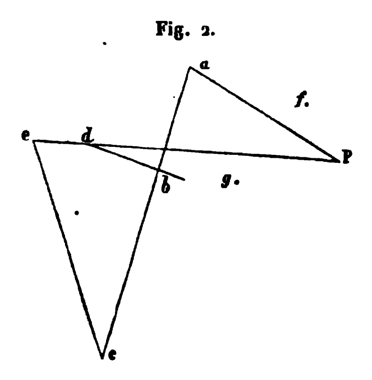
Le théorème général qui précède conduit, comme on sait, à divers corollaires dont la démonstration directe est d'ailleurs très-simple :

1° Les tangentes menées à une cubique en trois points pris en ligne droite coupent la courbe en trois points également en ligne droite.

Si l'on prend, pour déterminer une cubique, trois points en ligne droite *a*, *b*, *c* (*fig.* 2), les tangentes en *b*, *c*, les points *d*, *e* où elles coupent la courbe, enfin deux autres *f*, *g* pris d'une manière quelconque, on voit facilement qu'en prenant pour coniques génératrices celles qui ont un double contact suivant *bc*, le pivot sera

sur la droite *de*; soit P ce pivot. Au rayon P*a* correspond la conique réduite à la droite double *bc*; P*a* est donc tangente à la cubique en *a*.

Fig. 2.



2° La droite qui joint deux points d'inflexion coupe la courbe en un troisième point d'inflexion.

Soient *at*, *bt'* deux tangentes d'inflexion, *c*, *d*, *e* trois points quelconques qui achèvent de déterminer la cubique. Si l'on prend pour base deux des trois points infiniment voisins confondus en *a*, et deux des points infiniment voisins confondus en *b*, le pivot sera sur la droite *ab*. Pour mener la tangente en ce point, il suffit de chercher le rayon correspondant à la droite double *ab* (conique passant au pivot); quel que soit ce rayon, les trois points de la courbe qui lui appartiennent, savoir : le pivot lui-même et les deux points d'intersection avec la conique *ab*, seront confondus en un seul.

On démontrerait, d'une manière analogue, que les trois asymptotes d'une cubique coupent la courbe en trois points en ligne droite; que si, par un point d'inflexion, on mène trois droites quelconques, les six points d'intersection appartiennent à une conique.

3° Supposons que les points d, e de la *fig.* 2 coïncident; le pivot P sera sur la tangente en d, la droite Pa sera toujours tangente en a, et l'on aura ce théorème de Maclaurin :

Si, d'un point d'une cubique, on mène deux tangentes, la corde de contact coupe la courbe en un troisième point, et les tangentes menées au point donné et en ce dernier point se coupent sur la courbe.

4° Si le point (d, e) est un point d'inflexion, le pivot P vient se confondre avec lui, et l'on en conclut que, si par un point d'inflexion on mène trois tangentes, les trois points de contact sont en ligne droite.

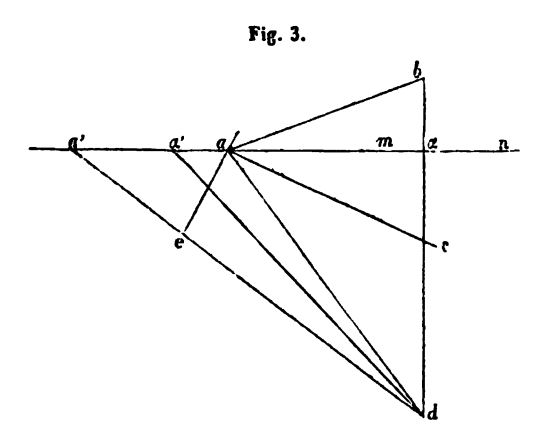
La cubique définie par un point d'inflexion I, la direction de la tangente, les contacts a, b, c situés en ligne droite, enfin par un dixième point quelconque, est engendrée par un faisceau de coniques tangentes en b, c aux droites Ib, Ic, et par un faisceau de droites issues de I. La corde de contact est la polaire du pivot I par rapport à toutes les coniques génératrices; relativement à la courbe et au point d'inflexion, elle jouit des mêmes propriétés que les polaires des coniques. Ainsi toute sécante menée par le point I est divisée harmoniquement par ce point et par la corde de contact; si l'on mène deux sécantes quelconques Imn, I$m'n'$, les droites mm', nn' et mn', $m'n$ se coupent sur cette corde.

III. Soient ab, ac deux tangentes à une cubique menées d'un point a de la courbe, ae la tangente en a, d le troisième point d'intersection de la courbe et de la droite bc (*fig.* 3).

D'après un des théorèmes précédents, ed est tangente en d; en d'autres termes, le système des neuf points formé par les quatre contacts a, b, c, d et par le point e con-

stitue un groupe *pivotable* pour une infinité de cubiques. Quel que soit le dixième point m choisi pour déterminer une de ces courbes, si l'on prend pour coniques génératrices celles qui ont un double contact suivant bc, le

Fig. 3.



pivot des rayons sera en e. Concevons que le point m se déplace sur une transversale $a\alpha$; à chaque position de m correspondra une position de n, troisième intersection de la cubique et de la transversale, et réciproquement ; on aura ainsi des segments en involution mn, $m'n'$,.... Lorsque m coïncide avec α, la cubique se réduit à la droite ea et à la droite double bc, le segment mn devient le point α, qui est donc un des points doubles de l'involution. Lorsque m vient en a', intersection de $a\alpha$ et de de, la cubique devient le système des droites $a'a$, ab, ac, de sorte que $a'a$ est un segment de l'involution ; le second point double est α', conjugué harmonique de α par rapport à aa'. On peut donc énoncer ce théorème :

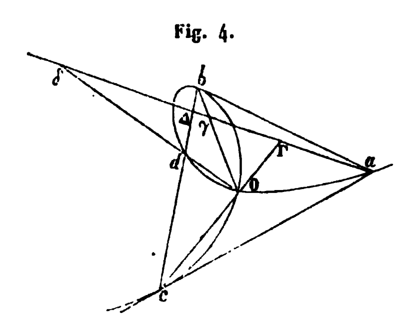
Si, par le point d, on mène une droite $d\alpha'$ telle que le faisceau $d(\alpha, a, \alpha', a')$ soit harmonique, toute trans-

versale issue du point a est coupée harmoniquement par les droites dα, dα' et par la cubique en m, n.

C'est la douzième proposition du Traité de Maclaurin sur les courbes du troisième ordre.

IV. On donne une cubique à point double, deux tangentes *ab*, *ac* menées d'un point *a* de la courbe; toute transversale passant en *a* est divisée harmoniquement par la courbe, par la corde de contact *bc* et par la droite qui joint le point double O au point *d* où cette corde rencontre la courbe (*fig.* 4).

Fig. 4.



Toutes les fois qu'un des points de la base des coniques coïncide avec le pivot des rayons, il est un point double de la cubique engendrée; lorsqu'un point double entre dans les données, il suffit de six autres points pour achever de déterminer la cubique; on peut prendre alors arbitrairement trois des six points pour compléter la base (*).

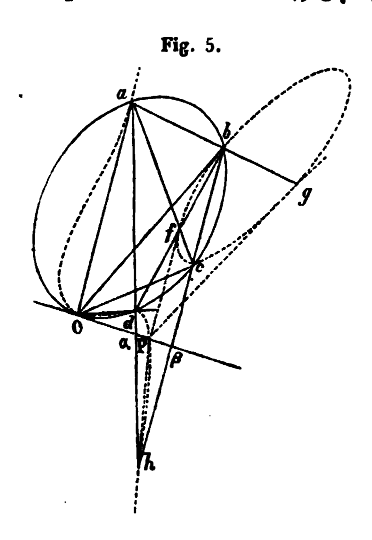
D'après cela, soit O*abc* la base, O étant le pivot. A la conique O*abcb*, c'est-à-dire (*ab*, O*c*), correspond le

(*) M. de Jonquières, dans ses *Mélanges de Géométrie* et dans son Mémoire sur la génération des courbes, a étudié avec détails la construction des courbes du troisième, du quatrième ordre et même des ordres supérieurs à points multiples, dans divers cas particuliers.

rayon Ob; de même le rayon Oc correspond à l'ensemble des droites ac, Ob, et le rayon Od à l'ensemble des droites Oa, bc. Menons par le point a une transversale quelconque; on aura les segments $a\Gamma$, $a\gamma$, $a\Delta$, auxquels correspondent respectivement les rayons Oγb, OΓ, O$d\delta$. On voit que les points Γ, γ, Δ d'une part, γ, Γ, δ de l'autre, déterminent deux divisions homographiques dont les points doubles sont les intersections de la courbe et de la transversale. Comme Γ et γ sont en correspondance réciproque, les segments formés par les couples de points homologues sont en involution; $\Delta\delta$ est un de ces segments : il est donc divisé harmoniquement par les points doubles, ce qui démontre le théorème.

V. Si, par un point d'une cubique, on mène quatre tangentes, les lignes qui joignent deux à deux les points de contact se coupent sur la courbe (*fig.* 5).

Fig. 5.



Soient Oa, Ob, Oc, Od quatre droites convergentes;

il est évident qu'on peut déterminer une cubique par les conditions de passer en O et de toucher en *a*, *b*, *c*, *d* les quatre droites.

Je prends *abcd* pour base; pour trouver le pivot, il faut circonscrire au quadrilatère *ab*O*c* une conique C capable du rapport anharmonique des quatre coniques $\bar{a}bcd$, $a\bar{b}cd$, *abcd*O, $ab\bar{c}d$, et au quadrilatère *ab*O*d* une conique C′ capable du rapport $\bar{a}bcd$, $a\bar{b}cd$, *abcd*O, $abc\bar{d}$ (la notation $a\bar{b}cd$ désigne la conique tangente en *b* à la droite O*b*). Or, toutes les coniques du faisceau déterminent sur la tangente en O à *abcd*O une involution dont O est un des points doubles. Le second point double P n'est autre chose que le point de concours de toutes les polaires de O, puisque c'est le conjugué harmonique de O par rapport à tous les segments. Pour les cinq coniques considérées, *abcd*(*a*, *b*, *c*, *d*, O), les polaires sont les droites P*a*, P*b*, P*c*, P*d*, PO, et elles forment un faisceau homographique à celui des coniques. P est donc le pivot, et on l'obtient en prenant le conjugué harmonique du point O par rapport à un segment quelconque de l'involution, par exemple $\alpha\beta$ intercepté sur la tangente par la conique (*ac*, *bd*). On voit qu'à chaque conique du faisceau correspond un rayon qui est la polaire du point O. En particuler, si l'on considère le couple de droites *ac*, *bd*, le rayon correspondant sera P*f*; *f* est donc un point de la cubique. Il en est de même des points *g*, *h*.

Corollaires. — 1° Les rayons P*f*, P*g*, P*h* sont tangents à la cubique en *f*, *g*, *h*; on a donc immédiatement les quatre tangentes issues de P, la quatrième étant PO. Enfin, la tangente en P sera la tangente à la conique PO*fgh*, ou, ce qui revient au même, le rayon correspondant à la conique *abcd*P; ces conséquences sont évidentes. De plus, les points de concours des côtés opposés et le point de

concours des diagonales du quadrilatère Ofgh seront trois nouveaux points de la courbe. Soit p le point où la tangente en P à la conique POfgh rencontre la conique $abcd$P ; il suffira de joindre p aux trois points dont il s'agit pour avoir les tangentes en ces points.

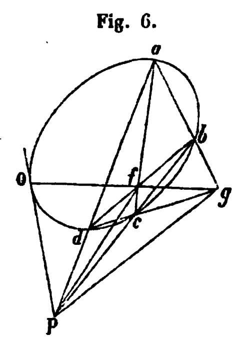
2° Toute transversale menée par le point O est divisée harmoniquement par la courbe et par deux des cordes de contact.

Cette propriété résulte immédiatement de ce que les polaires du point O par rapport aux coniques du faisceau $abcd$ sont précisément les rayons homologues du faisceau de droites ; car les points de la courbe situés sur la transversale sont les points doubles de l'involution déterminée par les coniques sur cette droite ; ils divisent harmoniquement tous les segments, en particulier ceux qu'interceptent les couples de cordes (ac, bd), (ab, cd), (ad, bc).

La transversale est aussi divisée harmoniquement par la cubique et par la conique $abcd$O, qui est la première polaire du point O.

3° Supposons que le point P coïncide avec un des

Fig. 6.



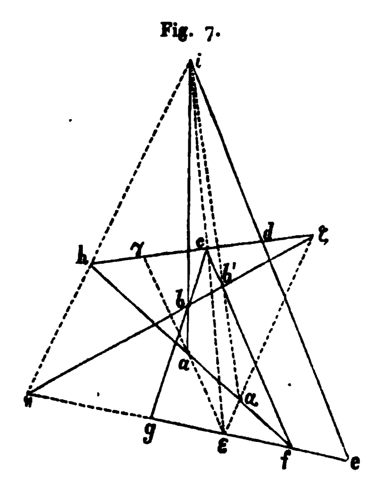
points f, g, h, avec h par exemple. Alors la droite fg (*fig.* 6) passera en O ; pour avoir la tangente en P à

la cubique, il faudra mener le rayon correspondant à la conique *abcd*P. Comme cette conique se réduit à deux droites, on voit que la courbe a trois points confondus en P; P est un point d'inflexion, O*fg* est la corde de contact, la tangente d'inflexion est la polaire de O par rapport aux droites *ad*, *bc*.

On peut présenter ces résultats sous la forme suivante : Soient P un point d'inflexion, PO, P*f*, P*g* les tangentes issues de ce point, O*a*, O*b*, O*c*, O*d* les tangentes issues du point O; les points de rencontre des côtés opposés du quadrilatère *abcd* et de ses diagonales sont en P, *f*, *g*. Cette propriété des cubiques fait l'objet de la question 896 des *Nouvelles Annales*, proposée par M. Sylvester, et dont une solution analytique a paru dans le numéro d'avril 1871.

VI. Lorsqu'une cubique passe par les six sommets d'un hexagone *abcdef* et par deux des points de con-

Fig. 7.



cours *g*, *h* des côtés opposés, elle passe nécessairement par le troisième point de concours *i* (*fig.* 7).

On peut toujours faire passer une cubique par les neuf points a, b, c, ..., i; mais je vais prouver que la question est indéterminée ou que les neufs points forment un groupe pivotable.

Soient $abde$ la base, $cfghx$, $cfgiy$ les deux coniques qui doivent donner le pivot; la première est capable du rapport $abde(c, f, g, h)$, la seconde du rapport $abde(c, f, g, i)$. Si φ et γ sont les points où les coniques $abdef$, $abdeg$ coupent la droite dch, le premier des deux rapports anharmoniques ci-dessus est celui des quatre points c, φ, γ, h. Pour trouver φ, il suffit de joindre le point b au point η où ih rencontre fg, en vertu du théorème de Pascal appliqué à l'hexagone inscrit $ab\varphi def$. Pour trouver γ, il faut joindre le point a au point ε où ic rencontre fg (même théorème appliqué à l'hexagone $abged\gamma$). Cette construction des points φ et γ fait voir que le rapport (c, φ, γ, h) est égal à celui du faisceau de droites $i(c, f, g, h)$. Donc la conique $cfghx$ passe en i; on verrait de même que la conique $cfgiy$ passe en h, et que, par conséquent, elle se confond avec la première, c'est-à-dire que le pivot est indéterminé.

En général, pour faire passer une cubique par neuf points satisfaisant aux conditions de l'énoncé, on peut prendre quatre des points pour base, et placer le pivot en un point quelconque de la conique passant par les cinq autres.

Remarque. — J'ai dit que le rapport anharmonique (c, φ, γ, h) était égal à celui des faisceaux $i(c, f, g, h)$.

Soient, en effet (même figure), $ih\eta$, $ie\varepsilon$ deux transversales issues d'un point i; prenons sur hc, $\eta\varepsilon$ deux points quelconques φ, f. Si l'on joint cf, $\varepsilon\varphi$, les points a', b' où ces droites rencontrent hf, $\eta\varphi$ sont en ligne droite avec i, en vertu du théorème de Pascal appliqué à l'hexagone $hfc\varepsilon\varphi\eta$ inscrit dans le couple de droites

he, *ne*. Menons des transversales telles que *iab*; à chaque position de *iab* correspondent des points *g*, γ obtenus en joignant *cb*, εa; *g* et γ décriront deux divisions homographiques dont on a trois couples de points correspondants, savoir (f, φ), (ε, c), (η, h). Donc, etc.

Corollaire. — Soient *ab*, *ac* deux tangentes issues d'un point *a* d'une cubique, *d* un autre point de la courbe; *e*, *f* les troisièmes intersections des droites *db*, *dc*. Si l'on joint *bf*, *ce*, ces droites se coupent en un point *g* appartenant à la cubique.

Il suffit, pour le reconnaître, d'appliquer le théorème précédent à l'hexagone *fecebb* dont deux côtés sont infiniment petits. C'est la seizième proposition du Traité de Maclaurin. On en déduit facilement diverses conséquences curieuses sur lesquelles je n'insisterai pas.

(*La suite prochainement.*)

QUESTION D'EXAMEN A L'ÉCOLE NAVALE.

SOLUTION DE M. BERGERON,
Professeur de Mathématiques.

Soit M *un point pris sur une circonférence; on joint ce point à deux points* K *et* H *pris à égale distance du centre* O *sur un même diamètre* AB; *on prolonge* MH *et* MK *jusqu'à leur rencontre en* D *et* C *avec la circonférence. Si l'on tire* DC *et qu'on la prolonge jusqu'à sa rencontre en* P *avec le diamètre* AB, *et que l'on joigne* P *au point* N, *extrémité du diamètre qui passe par* M, *il s'agit de démontrer que* PN *est tangente à la circonférence.*

En effet, à cause de OK = OH et OM = ON la figure

MHKN (*) est un parallélogramme. Joignons le point N aux points C, D et au milieu I de CD. Les deux triangles CND et NKM sont semblables, à cause des angles M et N respectivement égaux aux angles D et C. Il est clair que les triangles NKO et CNI sont aussi semblables, parce que les droites KO et NI joignent des sommets homologues aux milieux des côtés opposés. Les angles NIC, NOK sont égaux, et il est évident que les points P, N, I, O sont sur une même circonférence; et comme PIO est un angle droit, puisque I est le milieu de la corde CD, PO est un diamètre de la circonférence qui passe par les quatre points. Donc l'angle PNO est droit, PN est donc perpendiculaire à l'extrémité d'un diamètre de la circonférence donnée, et par suite tangente à cette circonférence. C. Q. F. D.

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. JAMET,

Élève du lycée de Pau.

Si, du centre O *du cercle circonscrit à un triangle* ABC, *on abaisse sur les côtés* BC, AC, AB *du triangle des perpendiculaires* OD, OE, OF, *la somme de ces trois perpendiculaires est égale à la somme des rayons des cercles inscrit et circonscrit au triangle.*

Soient ω le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC (*); M le point où le prolongement de la droite OD perpendiculaire à BC rencontre la circonférence circonscrite au triangle; ωH la perpendiculaire abaissée du

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

centre ω sur le côté BC; K la projection de ω sur ODM. Les droites ωH, OM sont des rayons des cercles inscrit et circonscrit au triangle ABC; il s'agit donc de démontrer que

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} OD + OE + OF = \omega H + OM, \\ \text{ou} \\ OE + OF = \omega H + OM - OD. \end{array} \right.$$

Mais $OM - OD = DM$, et $\omega H + DM = DK + DM = KM$; par conséquent, l'égalité (1) en démonstration revient à

$$(2) \qquad OE + OF = KM.$$

Cela admis, menons par le point M, milieu de l'arc BMC, la corde MA' parallèle au côté BA du triangle ABC, et prolongeons la droite OF perpendiculaire sur BA, jusqu'à ce qu'elle rencontre, en un point E', la parallèle MA' à BA : il en résultera $MA' = AC$, et $OE' = OE$. Ce qui réduit l'égalité (2) $OE + OF = KM$ à $OE' + OF = KM$, et, par suite, à

$$(3) \qquad FE' = KM.$$

Or, en abaissant du point A une perpendiculaire AG sur la corde MA', on formera un triangle rectangle AGA' qui sera égal au triangle rectangle MωK. En effet, $AA' = MB = M\omega$; et, d'autre part, chacun des deux angles AA'G, MωK est égal à $C + \frac{1}{2}A$, comme il est facile de s'en assurer; donc les triangles rectangles AA'G, MωK sont égaux, et l'on a

$$AG = KM,$$

d'où

$$FE' = KM.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

NOTE SUR LE LIEU DU POINT DE CONTACT DE DEUX CERCLES MOBILES QUI DOIVENT ÊTRE TANGENTS CHACUN A DEUX CERCLES FIXES;

PAR M. A. HILAIRE,
Professeur au lycée de Douai.

Je rattacherai la solution de cette question à la méthode suivie par M. *Salmon* dans son *Traité des sections coniques* pour construire un cercle tangent à trois cercles donnés (n° 119, p. 159 de l'édition française).

Je conserve les notations de M. Salmon :

$S = 0$, $\Sigma = 0$ représentent les équations des cercles mobiles;

$S' = 0$, $S'' = 0$ des deux cercles fixes.

Je suppose tous les contacts extérieurs : r, r', r'' sont les rayons des circonférences S, S', S'', et d', d'' les distances du centre de S aux centres de S' et S''.

Les coordonnées du point de contact des circonférences S et Σ, devant vérifier les équations

$$S = 0, \quad \frac{S - S'}{d'^2 - (r - r')^2} = \frac{S - S''}{d''^2 - (r - r'')^2}$$

(SALMON, p. 160, édition française), doivent vérifier aussi l'équation qui en est une conséquence :

$$\frac{S'}{d'^2 - (r - r')^2} = \frac{S''}{d''^2 - (r - r'')^2}.$$

Mais, la circonférence S étant tangente extérieurement aux circonférences S' et S'', on a $d' = r + r'$ et $d'' = r + r''$, ce qui réduit les deux dénominateurs à $4rr'$ et $4rr''$. En supprimant, des deux côtés, le facteur $4r$, le rayon du

cercle variable S se trouve éliminé, et l'on a immédiatement pour équation du lieu cherché $\frac{S'}{r'} = \frac{S''}{r''}$, équation d'un cercle ayant même axe radical avec les cercles S' et S''.

J'ai supposé les contacts extérieurs; en faisant d'autres hypothèses, je trouverai un second cercle $\frac{S'}{r'} = -\frac{S''}{r''}$. Le lieu se compose donc de deux cercles.

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE NEWTON;

PAR M. GARDON,

Élève de Mathématiques élémentaires au lycée de Tournon (classe de M. Launoy).

Les milieux M, M' *des diagonales* AC, BD *d'un quadrilatère* ABCD *circonscrit à un cercle et le centre* O *de ce cercle sont en ligne droite.*

Les parallèles menées par les points M et M' à CD et à AB respectivement passent par le milieu R de AD (*). Ceci posé, regardons les trois tangentes AB, AD, CD comme fixes, et le point de contact de la quatrième BC comme se mouvant sur le cercle. Les milieux des diagonales des nouveaux quadrilatères ainsi formés se trouveront sur MR et sur M'R. Les points mobiles B, C décrivant sur AB et DC des divisions homographiques, les droites passant par D et les différentes positions de B, et les droites passant par A et les différentes positions correspondantes de C forment deux faisceaux homographiques qui ont un rayon homologue DRA commun. Donc les droites MR,

---

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

M'R, divisées homographiquement par ces deux faisceaux, ont un point homologue commun, R; d'où il suit que les droites MM' qui joignent deux points de division homologues doivent passer par un même point. Si nous considérons BC dans une position B'C' telle que l'on ait B'C' égale à DC', il est facile de voir que les milieux M_1, M'_1 et le point O sont en ligne droite. De même, si BC occupe une troisième position B''C'' telle que l'on ait B''C'' égale à AD, on verra que les milieux M_2, M'_2 et le centre O sont en ligne droite. Les droites $M_1M'_1$ et $M_2M'_2$ passant par O, toute droite MM' passera aussi par ce point. Le théorème est donc démontré.

SOLUTIONS DES QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 979

(voir 2e série, t. IX, p. 92);

PAR M. E. DE HUNYADY,
Professeur à l'École Polytechnique, de Bude.

Étant donnée la fonction

$$y = A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + A_3 \cos 3x + \ldots + A_n \cos nx,$$

déterminer les coefficients $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, *de manière que, pour* $x = \frac{\pi}{n+1}$, *y prenne la valeur de* $y_1, \ldots$, *et que, pour* $x = \frac{n\pi}{n+1}$, $y = y_n$; $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ *étant des quantités données.* (H. BROCARD.)

1. La solution de la question précédente dépend de la

résolution du système linéaire suivant :

$$(1)\quad \begin{cases} A_1\cos x + A_2\cos 2x + \ldots + A_n\cos nx = y_1, \\ A_1\cos 2x + A_2\cos 4x + \ldots + A_n\cos 2nx = y_2, \\ A_1\cos 3x + A_2\cos 6x + \ldots + A_n\cos 3nx = y_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_1\cos nx + A_2\cos 2nx + \ldots + A_n\cos n^2x = y_n, \end{cases}$$

pour $x = \frac{\pi}{n+1}$.

Si l'on désigne par Δ le déterminant du système (1) et par i un nombre entier quelconque de la suite 1, 2, 3,..., n, on trouve, d'après les règles générales de la résolution des équations d'un système linéaire,

$$(2)\quad A_i\Delta = \begin{vmatrix} \cos x & \ldots & \cos(i-1)x & y_1 & \cos(i+1)x & \ldots & \cos nx \\ \cos 2x & \ldots & \cos 2(i-1)x & y_2 & \cos 2(i+1)x & \ldots & \cos 2nx \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos nx & \ldots & \cos n(i-1)x & y_n & \cos n(i+1)x & \ldots & \cos n^2x \end{vmatrix}.$$

En outre, si l'on pose, pour des valeurs quelconques de k et de λ de la suite 1, 2,..., n,

$$(3)\quad \begin{cases} \cos^2 kx + \cos^2 2kx + \ldots + \cos^2 nkx = \Sigma\cos^2 kx, \\ \cos kx\cos\lambda x + \cos 2kx\cos 2\lambda x + \ldots + \cos nkx\cos n\lambda x = \Sigma\cos kx\cos\lambda x, \end{cases}$$

$$(4)\quad y_1\cos kx + y_2\cos 2kx + \ldots + y_n\cos nkx = s_k,$$

on a, en multipliant chaque membre de l'équation (2) par le déterminant Δ,

$$(5)\quad A_i \begin{vmatrix} \Sigma\cos^2 x & \Sigma\cos x\cos 2x & \ldots & \Sigma\cos x\cos nx \\ \Sigma\cos x\cos 2x & \Sigma\cos^2 2x & \ldots & \Sigma\cos 2x\cos nx \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Sigma\cos x\cos nx & \Sigma\cos 2x\cos nx & \ldots & \Sigma\cos^2 nx \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \Sigma\cos^2 x & \ldots & \Sigma\cos x\cos(i-1)x & s_1 & \Sigma\cos x\cos(i+1)x & \ldots & \Sigma\cos x\cos nx \\ \Sigma\cos x\cos 2x & \ldots & \Sigma\cos 2x\cos(i-1)x & s_2 & \Sigma\cos 2x\cos(i+1)x & \ldots & \Sigma\cos 2x\cos nx \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Sigma\cos x\cos nx & \ldots & \Sigma\cos nx\cos(i-1)x & s_n & \Sigma\cos nx\cos(i+1)x & \ldots & \Sigma\cos n^2 x \end{vmatrix}$$

2. Les éléments des déterminants précédents sont susceptibles d'une simplification importante. En remarquant que

$$\cos\varphi\cos\psi = \tfrac{1}{2}[\cos(\varphi+\psi)+\cos(\varphi-\psi)],$$

on a, pour $\varphi = kx$, $\psi = \lambda x$,

$$\cos kx \cos\lambda x = \tfrac{1}{2}[\cos(k+\lambda)x + \cos(k-\lambda)x];$$

d'où l'on tire

$$(6)\qquad \Sigma\cos kx\cos\lambda x = \tfrac{1}{2}\Sigma[\cos(k+\lambda)x+\cos(k-\lambda)x].$$

En outre, on trouve pour la somme $\Sigma\cos(k+\lambda)x$, d'après une formule bien connue (*voir*, par exemple, SERRET, *Traité de Trigonométrie*, p. 25), la valeur suivante :

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(n+1)(k+\lambda)x\sin\frac{1}{2}n(k+\lambda)x}{\sin\frac{1}{2}(k+\lambda)x},$$

à laquelle on peut donner encore la forme

$$\frac{\sin(n+1)(k+\lambda)x\cos\frac{1}{2}(k+\lambda)x}{2\sin\frac{1}{2}(k+\lambda)x} - \cos^2\tfrac{1}{2}(n+1)(k+\lambda)x,$$

en remarquant que

$$\sin\tfrac{1}{2}n(k+\lambda)x = \sin\tfrac{1}{2}[(n+1)-1](k+\lambda)x.$$

On aura enfin, en se rappelant que $x = \frac{\pi}{n+1}$,

$$(7)\qquad \Sigma\cos(k+\lambda)x = -\cos^2\tfrac{1}{2}(k+\lambda)\pi.$$

On trouve, de la même manière, que

$$(8)\qquad \Sigma\cos(k-\lambda)x = -\cos^2\tfrac{1}{2}(k-\lambda)\pi,$$

et, conséquemment,

$$\Sigma\cos kx\cos\lambda x = -\tfrac{1}{2}[\cos^2\tfrac{1}{2}(k+\lambda)\pi + \cos^2\tfrac{1}{2}(k-\lambda)\pi],$$

d'où l'on tire :

$$(9)\qquad \Sigma\cos kx\cos\lambda x = -1,$$

si $k+\lambda$, et conséquemment $k-\lambda$, est pair;

$$(10) \qquad \Sigma \cos kx \cos \lambda x = 0,$$

si $k+\lambda$, et conséquemment $k-\lambda$, est impair.

3. En posant dans l'équation (7) $\lambda = k$, on en déduit

$$\Sigma \cos 2kx = -\cos^2 k\pi = -1.$$

L'équation (8) perd sa validité pour des valeurs $\lambda = k$, parce que, dans le cas actuel,

$$\Sigma \cos (k-\lambda)x = n.$$

Enfin, prenant dans l'équation (6) $\lambda = k$, on trouve

$$(11) \qquad \Sigma \cos^2 kx = \tfrac{1}{2}(n-1).$$

4. Avant de faire les substitutions pour les éléments des déterminants dans l'équation (5), il sera convenable de distinguer le cas où n est un nombre pair de celui où n est impair.

En supposant que n est pair, l'équation (5) se simplifie, si l'on fait usage des équations (9), (10) et (11); on a, en effet, pour une valeur paire de i,

$$(12) \quad A_i . \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(n-1) & 0 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(n-1) & 0 & \dots & -1 \\ -1 & 0 & \frac{1}{2}(n-1) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & 0 & \dots & \frac{1}{2}(n-1) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(n-1) & 0 & \dots & -1 & s_1 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(n-1) & \dots & 0 & s_2 & 0 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & \dots & 0 & s_i & 0 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & \dots & 0 & s_n & 0 & \dots & \frac{1}{2}(n-1) \end{vmatrix}$$

et, pour une valeur impaire de i,

$$(13)\quad A_i \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(n-1) & 0 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(n-1) & 0 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & 0 & \dots & \frac{1}{2}(n-1) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(n-1) & 0 & \dots & 0 & s_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(n-1) & \dots & -1 & s_2 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & \dots & -1 & s_i & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & \dots & 0 & s_n & 0 & \dots & \frac{1}{2}(n-1) \end{vmatrix}.$$

On trouve aisément pour le coefficient de A_i la valeur

$$\frac{1}{4}\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n-2};$$

en outre, développant les déterminants suivant les éléments de la colonne dont le rang est i et divisant par le coefficient de A_i, on a :

(*a*) Si i est un nombre pair,

$$(14)\quad A_i = \frac{2}{n+1}(2s_2 + 2s_4 + \dots + 2s_{i-2} + 3s_i + 2s_{i+2} + \dots + 2s_n);$$

(*b*) Si i est un nombre impair,

$$(15)\quad A_i = \frac{2}{n+1}(2s_1 + 2s_3 + \dots + 2s_{i-2} + 3s_i + 2s_{i+2} + \dots + 2s_{n-1}).$$

Dans le cas où n est impair, il est facile de démontrer que le coefficient de A_i dans l'équation (5) sera égal à zéro en vertu des équations (9), (10) et (11); d'où l'on conclut qu'on ne peut déterminer que les rapports des quantités A si n est impair.

Nota. On peut aussi résoudre le système des équations suivantes :

$$\begin{aligned} &B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + \ldots + B_n \sin nx = z_1,\\ &B_1 \sin 2x + B_2 \sin 4x + \ldots + B_n \sin 2nx = z_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &B_1 \sin nx + B_2 \sin 2nx + \ldots + B_n \sin n^2 x = z_n, \end{aligned}$$

pour $x = \dfrac{\pi}{n+1}$, par un procédé analogue, en remarquant que

$$\Sigma \sin^2 kx = \tfrac{1}{2}(n+1),$$
$$\Sigma \sin kx \sin \lambda x = 0.$$

On trouve, en effet,

$$B_i = \frac{2}{n+1}(z_1 \sin ix + z_2 \sin 2ix + \ldots + z_n \sin nix).$$

Ce dernier système a été résolu par Lagrange, dans le Mémoire intitulé : *Recherches sur la nature et la propagation du son* (*Œuvres*, t. I, p. 80-89), par une méthode tout à fait différente de celle que nous avons suivie.

Question 1031

(voir 2e série, t. X, p. 335);

Par M. A. PELLISSIER,
Lieutenant au 17e d'Artillerie.

Un angle de grandeur constante se déplace dans un plan, de manière que le sommet décrive un cercle de rayon donné, et que l'un des côtés passe par un point fixe; on demande l'enveloppe de l'autre côté.

(C. Harkema.)

Je vais démontrer d'abord que, si par le foyer d'une conique on mène des droites faisant avec les tangentes un

angle constant, le lieu des rencontres de ces droites avec les tangentes est un cercle.

En effet, soient M (*) un point du lieu, α l'angle constant de la tangente MT avec la ligne MF menée du foyer. J'abaisse FP perpendiculairement sur la tangente, je joins le centre C au point P et je mène par un point O du petit axe la droite OF faisant avec ce petit axe l'angle α; enfin je joins OM. Les deux triangles OMF et CFP ont les angles CFP et OFM égaux, comme se composant chacun d'une partie égale à $\frac{\pi}{2} - \alpha$ et d'une partie commune MFC; de plus, on a

$$\frac{FP}{CF} = \frac{FM}{OF},$$

à cause de la similitude des triangles rectangles FMP, OFC. Les triangles OMF, PFC sont donc semblables et donnent

$$\frac{OM}{CP} = \frac{OF}{CF}.$$

Or on a

$$PC = a, \quad CF = c, \quad OF = \frac{c}{\sin \alpha};$$

d'où

$$OM = \frac{a}{\sin \alpha}.$$

J'en conclus, le point O étant fixe et la longueur OM constante, que le lieu des points M est un cercle décrit du point O comme centre avec $\frac{a}{\sin \alpha}$ pour rayon.

Si maintenant je transforme la figure par la méthode des polaires réciproques, il devient évident que l'enveloppe demandée est une conique ayant son foyer au point

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

fixe. C'est une ellipse, si le point donné est à l'intérieur du cercle; une parabole, s'il est sur le cercle; et enfin une hyperbole, s'il est à l'extérieur.

Note. — La même question a été résolue par MM. Yliac de Geisel, Moret-Blanc, Callandreau, Lecornu, élève du lycée de Caen.

CORRESPONDANCE.

Aux élèves abonnés. — Les élèves *abonnés* peuvent consulter la *rédaction* sur les difficultés qu'ils rencontreraient dans les questions d'examen, soit en mathématiques, soit en physique. Elle se fera un plaisir de leur en communiquer la solution.

M. H. Faure, chef d'escadrons d'artillerie; Marseille. — Le numéro de septembre 1871 contient un article de M. Chasles, dans lequel le célèbre géomètre donne les énoncés d'un grand nombre de propriétés des courbes planes obtenues au moyen de son *principe de correspondance*. Dans le chapitre I, p. 388, je trouve ce théorème :

Si, de chaque point d'une conique, on abaisse trois normales sur la courbe : 1° les cordes qui joignent deux à deux les pieds de ces normales enveloppent une courbe de la quatrième classe; 2° les tangentes menées par les pieds des trois normales se coupent sur une courbe du quatrième ordre.

D'autre part, dans mon *Recueil de théorèmes relatifs aux sections coniques*, publié en 1867 chez Gauthier-Villars, je donne le théorème (*voir* p. 15 du *Recueil*) :

Si l'on prend sur une conique des couples de points a et b, tels que les normales en ces points se coupent sur

la conique, la corde ab enveloppera une autre conique. Cet énoncé revient bien à la première partie de celui de M. Chasles, mais le résultat est différent : là où je trouve une conique, M. Chasles trouve une courbe de la quatrième classe. Ce résultat me semble inexact.

On sait que, si par un point O on mène des transversales, puis les normales aux points d'intersection de ces transversales avec une conique donnée, ces normales se coupent sur une courbe du troisième ordre qui rencontre la conique donnée en six points. Or, parmi ces six points, il y en a quatre qui sont les points où les normales menées du point O à la conique rencontrent obliquement cette conique. Il n'existe donc que deux autres points *m*, tels qu'en menant de ce point les trois normales *ma*, *mb*, *mc*, l'un des côtés *ab* du triangle *abc* passe par le point O. Par le point O, il ne peut donc passer que deux courbes *ab*, telles que les normales aux points *a* et *b* se coupent sur la conique, c'est-à-dire que cette corde enveloppe une conique.

Il est facile de voir que cette conique est concentrique à la conique donnée et tangente aux polaires des points de rebroussement de sa développée; ce qui la détermine complétement.

La seconde partie du théorème de M. Chasles est également inexacte, puisque les sommets du triangle formé par les tangentes menées par les pieds des normales sont les pôles des tangentes de la conique que nous venons de trouver. Le lieu cherché est encore une conique, et non une courbe du quatrième ordre.

Il est dit aussi, p. 388, que *les cordes d'une conique, normales en une de leurs extrémités, ont leurs milieux sur une courbe du huitième ordre.* Or il n'est pas difficile de voir que le lieu est seulement du sixième.

QUESTIONS.

1055. L'équation indéterminée $t^2 - Dn^2 = 4$, dans laquelle D est de la forme $(4n+2)^2+1$, n désignant un nombre entier positif quelconque 1, 2, 3,..., n'a aucune solution formée de deux nombres impairs, et la solution constituée par les deux nombres entiers positifs les plus petits est

$$t = 16(2n+1)^2+2, \quad u = 8(2n+1).$$

(F. Didon.)

1056. Soit une fonction $f(x)$ quelconque, finie et continue dans l'intervalle de a à x. Insérons, entre a et x, $n-1$ moyens géométriques $a\sqrt[n]{\frac{x}{a}}$, $a\sqrt[n]{\left(\frac{x}{a}\right)^2}$, ..., $a\sqrt[n]{\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}}$, et désignons par Mg la moyenne arithmétique des valeurs

$$f(a), \quad f\left(a\sqrt[n]{\frac{x}{a}}\right)\cdots, \quad f\left[a\sqrt[n]{\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}}\right], \quad f(x).$$

D'un autre côté, insérons $n-1$ moyens arithmétiques $a+\frac{x-a}{n}$, $a+\frac{2(x-a)}{n}$, ..., $a+\frac{(n-1)(x-a)}{n}$, entre a et x, et désignons par Ma la moyenne arithmétique des valeurs

$$\frac{f(a)}{a}, \quad \frac{f\left(a+\frac{x-a}{n}\right)}{a+\frac{x-a}{n}}, \ldots, \quad \frac{f\left(a+\frac{(n-1)(x-a)}{n}\right)}{a+\frac{(n-1)(x-a)}{n}}, \quad \frac{f(x)}{x}.$$

Lorsque n tend vers l'infini, le rapport $\frac{Ma}{Mg}$ tend vers une limite complétement indépendante de la fonction f; cette limite est $\frac{\log\frac{x}{a}}{x-a}$.

(F. Didon.)

ÉTUDE D'UN COMPLEXE DU SECOND ORDRE;

PAR M. PAINVIN.

1. Proposons-nous la question suivante :

On donne un ellipsoïde; étudier la position des droites par lesquelles on peut mener à cet ellipsoïde des plans tangents rectangulaires.

Si (D) est une des droites par lesquelles on peut mener deux plans tangents rectangulaires, un troisième plan tangent, perpendiculaire à cette droite, la rencontrera en un point situé sur la sphère (S), lieu des sommets des trièdres trirectangles circonscrits à l'ellipsoïde donné; de sorte que, si S est le point de rencontre et que D soit le pied de la perpendiculaire abaissée du centre O de l'ellipsoïde sur la droite (D), on aura

$$\overline{OS}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{DS}^2.$$

Mais la distance $\overline{DS}$ est visiblement égale à la distance du centre O au plan tangent perpendiculaire à la droite; par conséquent, si α, β, γ sont les angles de la droite (D) avec les axes Ox, Oy, Oz de l'ellipsoïde, et si

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

est l'équation de l'ellipsoïde donné, on a

$$\overline{OS}^2 = a^2 + b^2 + c^2, \quad \overline{DS}^2 = a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma;$$

par suite, en désignant par δ la distance du centre à la droite (D), on a la relation caractéristique

$$(1^{\circ}) \quad \delta^2 = a^2 + b^2 + c^2 - (a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma).$$

Il résulte de là que δ^2 doit être inférieur à $a^2 + b^2 + c^2$; donc :

THÉORÈME I. — *Les droites réelles satisfaisant à la question doivent toutes pénétrer dans l'intérieur de la sphère* (S), *lieu des sommets des trièdres trirectangles circonscrits à l'ellipsoïde donné.*

2. Représentons maintenant la droite (D) par des équations de la forme

$$(2^\circ)\qquad \begin{cases} x = mz + p, \\ y = nz + q, \qquad \text{où} \quad r = np - mq; \\ nx - my = r, \end{cases}$$

on a

$$\cos\alpha = m\cos\gamma, \quad \cos\beta = n\cos\gamma,$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{m^2 + n^2 + 1}}, \quad \delta^2 = \frac{p^2 + q^2 + r^2}{m^2 + n^2 + 1}.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'égalité (1°), préalablement mise sous la forme

$$\delta^2 = (b^2 + c^2)\cos^2\alpha + (c^2 + a^2)\cos^2\beta + (a^2 + b^2)\cos^2\gamma,$$

il vient

$$(3^\circ)\quad p^2 + q^2 + r^2 = (b^2 + c^2)m^2 + (c^2 + a^2)n^2 + (a^2 + b^2).$$

L'assemblage des droites (D) constitue un *complexe* défini par l'équation (3); ce complexe est du second ordre, mais il n'est pas le plus général de son degré. Je me propose ici d'en étudier les propriétés.

Une grande partie des propositions que je vais démontrer peut se déduire assez simplement de certaines considérations géométriques; mais j'ai accordé la préférence à la méthode analytique qui se présente ici avec des formules simples, des rapprochements intéressants, et permet d'étendre considérablement ce sujet de recherches.

La théorie des complexes généraux du second ordre, abordée pour la première fois par Plücker (*Neue Geo-*

metrie), a été complétée par M. Klein (*Mathematische Annalen*, t. II, 1870); certains complexes particuliers ont été l'objet des recherches de M. Battaglini (*Giornale di Matematiche*), et de M. Reye (*Die Geometrie der Lage*). *Voir*, en outre, le *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. II, p. 72.

L'étude actuelle a pour objet un complexe particulier du second ordre; je dirai d'abord que la méthode que j'ai adoptée est complétement différente de celles qui ont été suivies par les géomètres que je viens de citer; mais ce qu'il importe surtout de remarquer, c'est que ce complexe particulier, qui a son point de départ dans une définition géométrique bien précise, présente les rapports les plus intimes, soit avec les surfaces homofocales, soit avec la surface des ondes, et apporte, aux propriétés déjà si nombreuses de ces surfaces, un contingent assez considérable de propriétés nouvelles. Parmi les propositions que j'énonce, plusieurs devaient naturellement se présenter comme cas particulier des propositions générales déjà connues sur les complexes; mais je les ai toujours démontrées directement, afin que cette étude puisse se suffire à elle-même. Je ferai enfin observer que, dans cette recherche, j'ai toujours eu en vue la situation des droites *réelles* du complexe; c'est là ce qui spécialise et caractérise cette nouvelle étude.

3. Si x_0, y_0, z_0, et x_1, y_1, z_1 sont les coordonnées de deux points de la droite (D), on a

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} p &= \frac{x_0 z_1 - z_0 x_1}{z_1 - z_0}, \\ q &= \frac{y_0 z_1 - z_0 y_1}{z_1 - z_0}, \\ r &= \frac{x_0 y_1 - y_0 x_1}{z_1 - z_0}, \end{aligned}\right. \qquad \begin{aligned} m &= \frac{x_1 - x_0}{z_1 - z_0}, \\ n &= \frac{y_1 - y_0}{z_1 - z_0}; \end{aligned}$$

si u_0, v_0, w_0 et u_1, v_1, w_1 sont les coordonnées de deux plans passant par cette même droite (D), on a aussi

$$(1\ bis)\quad \begin{cases} p = \dfrac{v_0 - v_1}{v_0 u_1 - u_0 v_1}, & m = \dfrac{v_0 w_1 - w_0 v_1}{v_0 u_1 - u_0 v_1}, \\ q = \dfrac{u_0 - u_1}{v_0 u_1 - u_0 v_1}, & n = \dfrac{w_0 u_1 - u_0 w_1}{v_0 u_1 - u_0 v_1}. \\ r = \dfrac{w_0 - w_1}{v_0 u_1 - u_0 v_1}, & \end{cases}$$

Eu égard à ces valeurs, l'équation (3°) prend l'une ou l'autre des formes suivantes :

$$(2)\begin{cases} (y_0 z_1 - z_0 y_1)^2 + (z_0 x_1 - x_0 z_1)^2 + (x_0 y_1 - y_0 x_1)^2 \\ \quad = (b^2+c^2)(x_1-x_0)^2 + (c^2+a^2)(y_1-y_0)^2 + (a^2+b^2)(z_1-z_0)^2; \end{cases}$$

$$(3)\begin{cases} (b^2+c^2)(v_0 w_1 - w_0 v_1)^2 + (c^2+a^2)(w_0 u_1 - u_0 w_1)^2 \\ \quad + (a^2+b^2)(u_0 v_1 - v_0 u_1)^2 = (u_1-u_0)^2 + (v_1-v_0)^2 + (w_1-w_0)^2. \end{cases}$$

4. Si, dans l'équation (2), on regarde x_1, y_1, z_1 comme des coordonnées variables et qu'on supprime les indices, on a l'équation suivante :

$$(4)\ [\text{cône C}]\begin{cases} (z_0 y - y_0 z)^2 + (x_0 z - z_0 x)^2 + (y_0 x - x_0 y)^2 \\ \quad = (b^2+c^2)(x-x_0)^2 + (c^2+a^2)(y-y_0)^2 \\ \qquad + (a^2+b^2)(z-z_0)^2, \end{cases}$$

laquelle représente un cône du second ordre, lieu des droites du complexe passant par le point fixe $P(x_0, y_0, z_0)$; nous dirons que c'est un *cône du complexe*, et nous le désignerons par (C); il résulte du théorème I que les génératrices de ce cône pénètrent toutes dans la sphère (S).

Remarque. — Si du point P on circonscrit un cône à l'ellipsoïde donné, le cône (C) du complexe sera évidemment le lieu des droites par lesquelles on peut mener

des plans tangents rectangulaires au cône circonscrit; et si

$$MX^2 + NY^2 + PZ^2 = 0$$

est l'équation du premier cône rapporté à ses plans principaux, on sait que l'équation du second est

$$M(N + P)X^2 + N(P + M)Y^2 + P(M + N)Z^2 = 0.$$

5. Avant d'aller plus loin, nous indiquerons quelques notations et plusieurs formules dont nous ferons un fréquent usage.

Posons d'abord

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{ll} 1^\circ & \left\{\begin{array}{l} A = b^2 + c^2, \\ B = c^2 + a^2, \\ C = a^2 + b^2; \end{array}\right. \\ 2^\circ & \left\{\begin{array}{l} a_1^2 = b^2 - c^2, \\ b_1^2 = c^2 - a^2, \\ c_1^2 = a^2 - b^2; \end{array}\right. \\ 3^\circ & \left\{\begin{array}{l} e = a^2 + b^2 + c^2, \\ g = a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2, \\ h = a^2 b^2 c^2; \end{array}\right. \end{array}\right.$$

puis

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{ll} S = x^2 + y^2 + z^2 - e, & \text{sphère, lieu des sommets des trièdres trirectangles;} \\ G = Ax^2 + By^2 + Cz^2 - g, & \text{ellipsoïde auxiliaire;} \\ H = b^2c^2x^2 + c^2a^2y^2 + a^2b^2z^2 - h, & \text{ellipsoïde donné.} \end{array}\right.$$

L'équation $S = 0$ est celle de la sphère, lieu des sommets des trièdres trirectangles circonscrits à l'ellipsoïde donné; la sphère (S) enveloppe complétement l'ellipsoïde $G = 0$, qui est un ellipsoïde auxiliaire, enveloppant lui-même l'ellipsoïde donné $H = 0$.

L'équation générale des surfaces homofocales de l'ellipsoïde donné est

$$(7) \qquad \frac{x^2}{a^2+\rho}+\frac{y^2}{b^2+\rho}+\frac{z^2}{c^2+\rho}-1=0,$$

et, si ρ_1, ρ_2, ρ_3 sont les *paramètres* des trois surfaces homofocales passant par le point $P(x_0, y_0, z_0)$, on aura

$$(8) \qquad \frac{x_0^2}{a^2+\rho}+\frac{y_0^2}{b^2+\rho}+\frac{z_0^2}{c^2+\rho}-1=0,$$

et ρ_1, ρ_2, ρ_3 seront les racines de l'équation

$$(9) \qquad \rho^3 - S_0\rho^2 - G_0\rho - H_0 = 0;$$

ce qui donne lieu à l'identité

$$(10) \quad \rho^3 - S_0\rho^2 - G_0\rho - H_0 = (\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)(\rho-\rho_3),$$

puis aux relations

$$(11) \qquad \begin{cases} S_0 = \rho_1+\rho_2+\rho_3, \\ G_0 = -(\rho_1\rho_2+\rho_2\rho_3+\rho_3\rho_1), \\ H_0 = \rho_1\rho_2\rho_3. \end{cases}$$

On a encore

$$(12) \qquad \begin{cases} x_0^2 = -\dfrac{(a^2+\rho_1)(a^2+\rho_2)(a^2+\rho_3)}{b_1^2c_1^2}, \\ y_0^2 = -\dfrac{(b^2+\rho_1)(b^2+\rho_2)(b^2+\rho_3)}{c_1^2a_1^2}, \\ z_0^2 = -\dfrac{(c^2+\rho_1)(c^2+\rho_2)(c^2+\rho_3)}{a_1^2b_1^2}. \end{cases}$$

Maintenant nous admettrons constamment les inégalités

$$(13) \qquad a > b > c,$$

d'où

$$(13\ bis) \qquad a_1^2 > 0, \quad b_1^2 < 0, \quad c_1^2 > 0.$$

L'équation (8) nous montre que ses racines sont comprises entre $-a^2$, $-b^2$, $-c^2$ et $+\infty$; de sorte que nous pourrons toujours supposer

$$(14) \quad \begin{cases} -a^2 < \rho_3 < -b^2, & \text{hyperb. à 2 nappes;} \\ -b^2 < \rho_2 < -c^2, & \text{hyperb. à 1 nappe;} \\ -c^2 < \rho_1 < +\infty, & \text{ellipsoïde réel.} \end{cases}$$

6. Ceci admis, l'équation (4) du cône (C) pourra s'écrire

$$(15) \left[\begin{array}{c}\text{cône (C)}\\ \text{du}\\ \text{com-}\\ \text{plexe.}\end{array}\right] \begin{array}{l} x^2(S_0 + a^2 - x_0^2) + y^2(S_0 + b^2 - y_0^2) \\ \quad + z^2(S_0 + c^2 - z_0^2) - 2y_0z_0yz \\ \quad - 2z_0x_0zx - 2x_0y_0xy \\ \quad + 2Ax_0x + 2By_0y + 2Cz_0z - (G_0 + g) = 0. \end{array}$$

Si l'on forme, relativement à cette surface, l'équation en s, savoir :

$$\begin{array}{l} s^3 - (A + A' + A'')s^2 + (A'A'' - B^2 + A''A - B'^2 + AA' - B''^2)s \\ \qquad + AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B'' = 0, \end{array}$$

on trouve ici

$$(16) \quad s^3 - 2S_0s^2 + (S_0^2 - G_0)s + (H_0 + S_0G_0) = 0.$$

Si l'on a égard aux valeurs (11) et qu'on pose

$$(17) \quad \begin{cases} \sigma_1 = \rho_2 + \rho_3, \\ \sigma_2 = \rho_3 + \rho_1, \\ \sigma_3 = \rho_1 + \rho_2, \end{cases}$$

l'équation (16) pourra s'écrire

$$(16\ bis) \qquad (s - \sigma_1)(s - \sigma_2)(s - \sigma_3) = 0.$$

et l'on a les relations

$$(18)\quad \begin{cases} 2S_0 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \\ S_0^2 - G_0 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1, \\ H_0 + S_0 G_0 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3. \end{cases}$$

7. Si du point $P(x_0, y_0, z_0)$ on mène le cône circonscrit à l'ellipsoïde donné, le cône (C) aura les mêmes plans principaux que le cône circonscrit (n° 4, REMARQUE); mais on sait que les plans principaux de ce dernier cône sont les plans tangents aux trois surfaces homofocales qui passent par son sommet; donc :

THÉORÈME II. — *Les droites du complexe passant par un même point de l'espace forment un cône* (C) *du second ordre; les plans principaux du cône* (C) *du complexe sont les plans tangents, en son sommet, aux trois surfaces homofocales de l'ellipsoïde donné qui passent par ce sommet, ou, ce qui revient au même, les axes du cône* (C) *sont les normales aux trois surfaces homofocales qui passent par son sommet.*

Cette proposition nous permet d'obtenir facilement l'équation du cône (C) rapporté à ses plans principaux.

En effet, si $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ sont les cosinus des angles des directions de cordes principales correspondant aux racines $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, et si l'on pose

$$x' = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z, \quad y' = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z, \quad z' = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z,$$

l'équation de ce cône sera, comme on sait,

$$\sigma_1 x'^2 + \sigma_2 y'^2 + \sigma_3 z'^2 = 0.$$

Mais $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$ sont les plans tangents aux trois surfaces homofocales ρ_1, ρ_2, ρ_3 passant par le point (x_0, y_0, z_0), et la racine σ_1 correspond au plan tangent à la surface dont le paramètre est ρ_1, comme il résulte,

soit de la Remarque du n° 4, soit de considérations de symétrie; et ainsi des autres. L'équation du cône (C) est donc de la forme

$$\begin{aligned}\sigma_1\lambda_1^2&\left[\frac{x_0(x-x_0)}{a^2+\rho_1}+\frac{y_0(y-y_0)}{b^2+\rho_1}+\frac{z_0(z-z_0)}{c^2+\rho_1}\right]^2\\+\sigma_2\lambda_2^2&\left[\frac{x_0(x-x_0)}{a^2+\rho_2}+\frac{y_0(y-y_0)}{b^2+\rho_2}+\frac{z_0(z-z_0)}{c^2+\rho_2}\right]^2\\+\sigma_3\lambda_3^2&\left[\frac{x_0(x-x_0)}{a^2+\rho_3}+\frac{y_0(y-y_0)}{b^2+\rho_3}+\frac{z_0(z-z_0)}{c^2+\rho_3}\right]^2=0,\end{aligned}$$

les constantes λ_1, λ_2, λ_3 étant telles qu'on ait

$$\lambda_1^2\left[\frac{x_0^2}{(a^2+\rho_1)^2}+\frac{y_0^2}{(b^2+\rho_1)^2}+\frac{z_0^2}{(c^2+\rho_1)^2}\right]=1, \quad \cdots\cdot$$

Si l'on a égard aux valeurs (12), on trouve facilement que

$$\lambda_1^2=\frac{(a^2+\rho_1)(b^2+\rho_1)(c^2+\rho_1)}{(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)},\quad \lambda_2^2=\ldots,\quad \lambda_3^2=\ldots.$$

L'équation du cône (C) *du complexe rapporté à ses plans principaux est donc*

$$(19)\quad [C]\left\{\begin{aligned}&+\sigma_1(\rho_2-\rho_3)(a^2+\rho_1)(b^2+\rho_1)(c^2+\rho_1)\\&\qquad\times\left[\frac{x_0x}{a^2+\rho_1}+\frac{y_0y}{b^2+\rho_1}+\frac{z_0z}{c^2+\rho_1}-1\right]^2\\&+\sigma_2(\rho_3-\rho_1)(a^2+\rho_2)(b^2+\rho_2)(c^2+\rho_2)\\&\qquad\times\left[\frac{x_0x}{a^2+\rho_2}+\frac{y_0y}{b^2+\rho_2}+\frac{z_0z}{c^2+\rho_2}-1\right]^2\\&+\sigma_3(\rho_1-\rho_2)(a^2+\rho_3)(b^2+\rho_3)(c^2+\rho_3)\\&\qquad\times\left[\frac{x_0x}{a^2+\rho_3}+\frac{y_0y}{b^2+\rho_3}+\frac{z_0z}{c^2+\rho_3}-1\right]^2=0.\end{aligned}\right.$$

8. Cherchons maintenant les points (x_0, y_0, z_0) pour lesquels le *cône du complexe* se réduit à un système de deux plans.

Pour ces points, l'équation (16) doit avoir une racine nulle ; on a donc

$$(20) \qquad S_0 G_0 + H_0 = 0, \quad \text{ou} \quad \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = 0.$$

On obtient ainsi une surface que nous désignerons par Δ, et dont l'équation est

$$(21) \qquad \Delta = SG + H = 0,$$

ou

$$(21\ bis) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta = (x^2 + y^2 + z^2 - e)(Ax^2 + By^2 + Cz^2 - g) \\ + b^2c^2x^2 + c^2a^2y^2 + a^2b^2z^2 - a^2b^2c^2 = 0, \end{aligned} \right.$$

ou encore

$$(21\ ter) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta = (x^2 + y^2 + z^2)(Ax^2 + By^2 + Cz^2) + ABC \\ -[A(B+C)x^2 + B(C+A)y^2 + C(A+B)z^2] = 0. \end{aligned} \right.$$

On voit que cette surface est du quatrième ordre, et la dernière forme nous montre que c'est une *surface des ondes* ayant pour ellipsoïde directeur

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} - 1 = 0.$$

9. Comme, dans le cas actuel, une des quantités σ_1, σ_2, σ_3 est nulle, nous voyons, par l'équation (19), que la droite d'intersection des deux plans est une des normales aux surfaces homofocales qui passent par le point (x_0, y_0, z_0) considéré ; ce qui résulte également de la Remarque du n° 4.

Nous démontrerons d'ailleurs, un peu plus loin, que l'arête du système de deux plans correspondant à un point (x_0, y_0, z_0) de la surface Δ touche la surface en ce point. Ainsi :

THÉORÈME III. — *Le lieu des points pour lesquels le cône* (C) *du complexe se réduit à un système de deux*

plans distincts est une surface (Δ) *du quatrième ordre, laquelle est une* SURFACE DES ONDES *par rapport à l'ellipsoïde directeur*

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}-1=0.$$

Ce dernier ellipsoïde est la surface polaire réciproque de l'ellipsoïde (G) *par rapport à une sphère dont le rayon est* $\sqrt[4]{g}$.

L'arête du système des deux plans est normale à l'une des surfaces homofocales qui passent par le point considéré (x_0, y_0, z_0), *et touche en ce point la surface* Δ.

Nota. — 1° Il est entendu que les surfaces homofocales que nous considérerons dans le Mémoire actuel seront toujours des surfaces homofocales de l'ellipsoïde donné.

2° Pour abréger le langage, nous dirons que l'ensemble des deux plans auxquels peut se réduire le cône (C) est un *système de deux plans du complexe,* ou, plus simplement encore, un *système du complexe;* la droite d'intersection des deux plans sera dite l'*arête du système.*

10. Rappelons que les surfaces (S), (G), (H) s'enveloppent successivement (n° 5), et que les quantités S_0, G_0, H_0 sont positives ou négatives, suivant que le point (x_0, y_0, z_0) est extérieur ou intérieur à la surface correspondante.

Or, pour un point situé sur la surface Δ, c'est-à-dire tel que

$$S_0 G_0 + H_0 = 0,$$

on doit avoir

$$(22) \qquad S_0 < 0, \quad G_0 > 0.$$

Car si $S_0 > 0$, on a alors $G_0 > 0$, $H_0 > 0$, et l'équation ci-dessus n'admet pas de solutions réelles;

Si l'on a $S_0 < o$ et $G_0 > o$, alors $H_0 > o$; l'équation peut être vérifiée par des valeurs réelles de x_0, y_0, z_0;

Si l'on a à la fois $S_0 < o$, $G_0 < o$, $H_0 > o$, il n'y a pas de solutions réelles;

Enfin, si l'on a $S_0 < o$, $G_0 < o$, $H_0 < o$, il n'y aura pas encore de solutions réelles; car une des quantités σ_1, σ_2, σ_3 doit être nulle; or la quantité $\sigma_1 = \rho_2 + \rho_3$ ne peut être nulle, puisqu'elle est la somme de deux nombres négatifs (14), [n° 5]; d'un autre côté, lorsque σ_2 ou σ_3 s'annulent, la quantité G_0 se réduit à $+\rho_1^2$, (17) et (11); mais, ρ_1 étant réel, G_0 serait positif; par suite, l'hypothèse faite est inadmissible pour des valeurs réelles de x_0, y_0, z_0, vérifiant l'équation en question.

La surface Δ est donc tout entière renfermée entre la sphère (S) et l'ellipsoïde (G).

(*La suite prochainement.*)

SUR LES FORMULES FONDAMENTALES DE LA THÉORIE DES SURFACES;

PAR M. LAGUERRE.

(Extrait d'une Lettre adressée à M. Ch. Brisse.)

I.

... Les beaux travaux de MM. Bonnet, Bour et Codazzi ont notablement perfectionné la théorie des surfaces; les formules fondamentales de cette théorie me paraissent pouvoir être exposées d'une façon assez simple....

Je suppose les différents points de la figure rapportés à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, et les coor-

données des points de la surface exprimées en fonction de deux variables indépendantes u et v.

Soient (u) et (v) les courbes de la surface obtenues en donnant respectivement à u et à v des valeurs constantes.

Imaginons un trièdre trirectangle MX, MY, MZ, qui se déplace de façon que son sommet M décrive la surface, l'arête MZ lui étant normale; les deux arêtes MX et MY sont constamment situées dans le plan tangent en M, mais leur mouvement reste indéterminé.

Soient

$$\begin{array}{lll} \cos\alpha, & \cos\beta, & \cos\gamma, \\ \cos\xi, & \cos\upsilon, & \cos\zeta, \\ \cos\lambda, & \cos\mu, & \cos\nu, \end{array}$$

les cosinus que font respectivement les axes MX, MY, MZ avec les axes fixes Ox, Oy, Oz.

Si l'on passe d'un point quelconque de la surface (u, v) à un point infiniment voisin $(u + du, v + dv)$, d'après une formule bien connue sur le déplacement infiniment petit d'un corps invariable (*), on a les neuf relations suivantes :

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} d\cos\alpha = +(\mathrm{M}\,du + \mathrm{N}\,dv)\cos\xi + (\mathrm{P}\,du + \mathrm{S}\,dv)\cos\lambda, \\ d\cos\xi = -(\mathrm{M}\,du + \mathrm{N}\,dv)\cos\alpha - (\mathrm{R}\,du + \mathrm{Q}\,dv)\cos\lambda, \\ d\cos\lambda = -(\mathrm{P}\,du + \mathrm{S}\,dv)\cos\alpha + (\mathrm{R}\,du + \mathrm{Q}\,dv)\cos\xi, \\ d\cos\beta = +(\mathrm{M}\,du + \mathrm{N}\,dv)\cos\upsilon + (\mathrm{P}\,du + \mathrm{S}\,dv)\cos\mu, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

Je n'écris que les quatre premières de ces relations, les autres s'en déduisant immédiatement; M, N, P, Q, R et S désignent six fonctions données de u et de v.

(*) Voir *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. VI, la Note de M. Picart : *Nouvelle théorie du déplacement continu d'un corps solide*, p. 160.

II.

Comme les développements qui suivent s'appuient surtout sur les formules données (*) par M. Serret pour les lignes à double courbure, je transcrirai ici ces formules.

Soient

$$\cos a, \quad \cos b, \quad \cos c,$$
$$\cos x, \quad \cos y, \quad \cos z,$$
$$\cos l, \quad \cos m, \quad \cos n,$$

les cosinus des angles que font respectivement, avec les axes fixes Ox, Oy et Oz, la tangente à la courbe, la normale principale et l'axe du plan osculateur.

Désignons de plus par ds un élément infiniment petit de la courbe, par r le rayon de courbure et par t le rayon de torsion en ce point.

Les formules de M. Serret sont contenues dans le tableau suivant :

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{ll} d\cos a = \cos x\,\dfrac{ds}{r}, & d\cos l = \cos x\,\dfrac{ds}{t},\\[2mm] d\cos b = \cos y\,\dfrac{ds}{r}, & d\cos m = \cos y\,\dfrac{ds}{t},\\[2mm] d\cos c = \cos z\,\dfrac{ds}{r}; & d\cos n = \cos z\,\dfrac{ds}{t};\\[2mm] \multicolumn{2}{c}{d\cos x = -\cos a\,\dfrac{ds}{r} - \cos l\,\dfrac{ds}{t},}\\[2mm] \multicolumn{2}{c}{d\cos y = -\cos b\,\dfrac{ds}{r} - \cos m\,\dfrac{ds}{t},}\\[2mm] \multicolumn{2}{c}{d\cos z = -\cos c\,\dfrac{ds}{r} - \cos n\,\dfrac{ds}{t}.} \end{array}\right.$$

Elles sont, on le voit facilement, contenues dans les formules générales (1).

(*) Voir *Calcul différentiel* de Lacroix, t. II, p. 284 et 299.

Je suppose maintenant, en conservant toutes les notations précédentes, que la ligne considérée soit tracée sur la surface donnée.

La droite MZ étant normale à la surface, en désignant par i l'angle que fait la courbe avec l'axe MX, et par ϖ l'angle que fait la normale principale de la courbe avec la normale à la surface, les formules d'Euler donnent le système de formules suivant :

$$\cos a \cos\alpha + \cos b \cos\beta + \cos c \cos\gamma = \cos i,$$
$$\cos a \cos\xi + \cos b \cos\upsilon + \cos c \cos\zeta = \sin i,$$
$$\cos a \cos\lambda + \cos b \cos\mu + \cos c \cos\nu = 0;$$

$$\cos x \cos\alpha + \cos y \cos\beta + \cos z \cos\gamma = \sin\varpi \sin i,$$
$$\cos x \cos\xi + \cos y \cos\upsilon + \cos z \cos\zeta = -\sin\varpi \cos i,$$
$$\cos x \cos\lambda + \cos y \cos\mu + \cos z \cos\nu = \cos\varpi;$$

$$\cos l \cos\alpha + \cos m \cos\beta + \cos n \cos\gamma = -\cos\varpi \sin i,$$
$$\cos l \cos\xi + \cos m \cos\upsilon + \cos n \cos\zeta = \cos\varpi \cos i,$$
$$\cos l \cos\lambda + \cos m \cos\mu + \cos n \cos\nu = \sin\varpi.$$

Si maintenant nous différentions ces neuf équations en tenant compte des relations (1) et (2), nous obtiendrons, après quelques réductions faciles, le tableau suivant :

$$\text{(A)} \left\{ \begin{array}{l} -\dfrac{ds}{r}\sin\varpi = di + \text{M}\,du + \text{N}\,dv, \\ \dfrac{ds}{r}\cos\varpi = (\text{P}\,du + \text{S}\,dv)\cos i - (\text{R}\,du + \text{Q}\,dv)\sin i, \\ -d\varpi + \dfrac{ds}{t} = -(\text{P}\,du + \text{S}\,dv)\sin i - (\text{R}\,du + \text{Q}\,dv)\cos i, \end{array} \right.$$

qui donne les trois premières équations fondamentales de la théorie des courbes tracées sur les surfaces.

Les quantités $d\cos\alpha$, $d\cos\beta$, ... étant, par leur définition même, des différentielles exactes, en exprimant que cette condition est remplie, on obtiendra les trois

relations contenues dans le tableau suivant :

$$(B)\quad \begin{cases} \dfrac{dM}{dv} - \dfrac{dN}{du} = RS - PQ, \\ \dfrac{dP}{dv} - \dfrac{dS}{du} = MQ - RN, \\ \dfrac{dR}{dv} - \dfrac{dQ}{du} = NP - MS. \end{cases}$$

III.

Supposons maintenant que les courbes (u) et (v) déterminent sur la surface un réseau orthogonal, et que les axes MX et MY soient, en chaque point, tangents aux deux courbes qui s'y croisent à angle droit.

En désignant par ds un élément linéaire quelconque de la surface, soit

$$ds^2 = E^2 du^2 + G^2 dv^2,$$

d'où

$$ds \cos i = E\, du, \quad ds \sin i = G\, dv,$$

et

$$ds \cos a = E\, du \cos\alpha + G\, dv \cos\xi,$$
$$ds \cos b = E\, du \cos\beta + G\, dv \cos\upsilon,$$
$$ds \cos c = E\, du \cos\gamma + G\, dv \cos\zeta.$$

Je remarque, avec M. Bonnet (*), que par définition ces trois dernières quantités sont des différentielles exactes; exprimant ces conditions, en tenant compte des équations (1), nous obtiendrons les relations contenues dans le tableau suivant :

$$(C)\quad \begin{cases} \dfrac{dE}{dv} = -GM, \quad ES + GR = 0, \\ \dfrac{dG}{du} = EN, \quad \tang i = \dfrac{G\, dv}{E\, du}. \end{cases}$$

(*) *Mémoire sur la théorie des surfaces*, etc.; *Journal de l'École Polytechnique*, XLIIe cahier, p. 35.

J'ai introduit dans ce tableau la valeur de $\tan i$, en fonction de u et de v.

On a ainsi, en A, B, C, toutes les formules fondamentales relatives au cas où les courbes (u) et (v) sont orthogonales.

Il resterait à prouver que, si les fonctions M, N, P, Q, R, S, E, G satisfont aux équations aux différences partielles contenues dans les tableaux (B) et (C), ces fonctions déterminent effectivement une surface; pour cette démonstration, je renverrai au Mémoire de M. Bonnet, déjà cité.

IV.

Considérons maintenant le cas général; soit 2ω l'angle sous lequel, en un point quelconque de la surface, se coupent les courbes (u) et (v) qui se croisent en ce point.

Nous choisirons les axes MX et MY, de telle sorte qu'ils coïncident avec les bissectrices de cet angle.

En désignant par ds un élément linéaire quelconque de la surface, posons

$$ds^2 = E^2 du^2 + 2EG \cos 2\omega . du\, dv + G^2 dv^2,$$

d'où

$$ds \cos i = (E\,du + G\,dv)\cos\omega, \quad ds \sin i = (E\,du - G\,dv)\sin\omega,$$

et

$$ds \cos a = (E\,du + G\,dv)\cos\omega \cos\alpha + (E\,du - G\,dv)\sin\omega \cos\xi;$$

je ne transcris pas les valeurs de $ds \cos b$ et $ds \cos c$.

Si nous exprimons que ces trois dernières quantités sont des différentielles exactes, nous obtiendrons les relations contenues dans le tableau suivant, où j'ai aussi

transcrit la valeur de tang$i$,

$$
(C')\left\{
\begin{array}{l}
\left(\frac{dE}{dv} - \frac{dG}{du}\right)\frac{1}{\tan\omega} = E\left(N + \frac{d\omega}{dv}\right) + G\left(M - \frac{d\omega}{du}\right)\\
\left(\frac{dE}{dv} + \frac{dG}{du}\right)\tan\omega = - E\left(N + \frac{d\omega}{dv}\right) + G\left(M - \frac{d\omega}{du}\right),\\
(GR + EQ)\sin\omega = (ES - GP)\cos\omega,\\
\tan i = \frac{E\,du - G\,dv}{E\,du + G\,dv}\tan\omega.
\end{array}
\right.
$$

Les tableaux (A), (B), (C′) renferment toutes les formules fondamentales relatives au cas le plus général.

En terminant, je ferai remarquer que les considérations précédentes s'appliquent, sans modification, au cas de l'espace, lorsqu'on en détermine les points par les intersections successives de trois séries quelconques de surfaces.

Je reviendrai sur ce sujet.

MÉMOIRE SUR LA THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DES COURBES DU TROISIÈME ORDRE

(suite, voir même tome, p. 21);

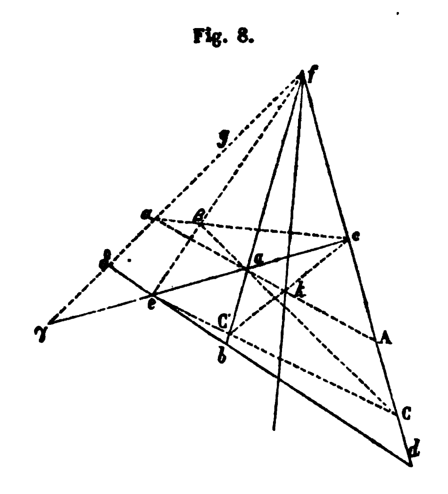
PAR M. KOEHLER.

VII. Si les six sommets d'un quadrilatère complet s'appuient sur une cubique, les tangentes en quatre sommets (dont trois ne sont pas en ligne droite) forment un quadrilatère dont les diagonales passent par les points de concours des côtés opposés du quadrilatère inscrit (*fig.* 8).

Soient *abcdef* le quadrilatère complet, *g* un point quelconque. On peut concevoir une cubique déterminée

par un faisceau de coniques passant en *a*, *b*, *c*, *d* et un faisceau de droites ayant *g* pour pivot. Donnons-nous de plus la tangente *a*A au point *a*. Je fais correspondre aux rayons *ge*, *gf*, *ga* les coniques (*ac*, *bd*), (*ab*, *cd*) et celle

Fig. 8.



qui a pour tangente *a*A. Les tangentes à la cubique en *c*, *d*, *b* seront les tangentes aux coniques qui correspondent respectivement à *gc*, *gd*, *gb*. Soient *a*C, *a*D, *a*B les tangentes en *a* à ces trois coniques (*a*D et *a*B ne sont pas représentées sur la figure).

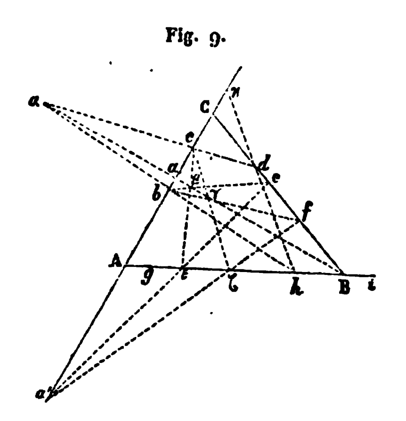
La direction *a*A étant donnée, il faut pour trouver *a*C chercher le rayon tel que les rapports *a*(*e*, *f*, A, C), *g*(*e*, *f*, *a*, *c*) soient égaux, c'est-à-dire prolonger *a*A jusqu'à la rencontre de *gf* en α, joindre *c*α qui rencontre *ef* en β, joindre *a*β. La tangente à la cubique en *c* étant tangente à la conique qui touche *a*C au point *a*, il suffit pour la construire de joindre *e*C et de mener la droite *c*C au point où *e*C rencontre *af*. Quelle que soit la direction *a*A, le point *k*, intersection de *a*A et

de cC', décrira une droite fk, polaire par rapport à l'angle afc du point γ où ec rencontre fg.

Considérons maintenant la transversale ebd; quelle que soit la direction de la tangente à la cubique en b, son point d'intersection k' avec la tangente en d sera sur une droite fk', polaire de δ relativement à l'angle afc; or fk et fk' coïncident, puisque les points γ et δ sont sur une droite qui passe en f. On verrait de même que les intersections i, i' des tangentes à la cubique en a et b, en c et d sont sur une même droite passant au point e.

VIII. *Théorème de Carnot.*—Soient ABC un triangle, a, b, c, d, e, f, g, h huit points : trois sur AC, trois sur CB, deux sur BA (*fig.* 9).

Fig. 9.



Il est d'abord évident que toutes les cubiques passant par les huit points passeront aussi par un neuvième point i situé sur le côté BA. On peut le reconnaître sans aucune construction en remarquant que le système des droites AB, AC, BC est une des cubiques considérées.

Pour trouver le point i, prenons pour base $bcdh$ (*fig.* 9)

et cherchons le rapport anharmonique des coniques $bcdh(a, e, f, g)$. Les segments qu'elles déterminent sur le côté BA sont hA, $h\varepsilon$, $h\varphi$, hg; on obtient les points ε, φ en joignant cd, bh, qui se coupent en α; il faut joindre ensuite be, bf, qui coupent $B\alpha$ en β, γ, joindre enfin $c\beta$, $c\gamma$. La conique circonscrite au quadrilatère $aefg$ et capable du rapport $bcdh(a, e, f, g)$ [ou, ce qui revient au même, du rapport $(A, \varepsilon, \varphi, g)$] coupera BA au point i. Pour obtenir le deuxième point a' où cette conique rencontre CA, il suffit de joindre $e\varepsilon$, $f\varphi$; ces deux droites se coupent en a' sur le côté CA. En effet, les points $e, f,\ldots, \varepsilon, \varphi,\ldots$ appartiennent à deux divisions homographiques sur les côtés BC, AB; deux points homologues coïncident en B, A et C sont deux points correspondants, et il en résulte que toutes les lignes telles que $e\varepsilon$ qui joignent deux points correspondants se coupent au même point sur AC. On voit que a' appartient à la conique dont il s'agit, et l'on aura immédiatement le point i. Cela posé, le théorème de Carnot, appliqué à cette conique, donne

$$\frac{Ag.Ai}{Bg.Bi}\cdot\frac{Be.Bf}{Ce.Cf}\cdot\frac{Ca.Ca'}{Aa.Aa'}=1.$$

On a aussi, en considérant la transversale hdn,

$$\frac{Ah}{Bh}\cdot\frac{Bd}{Cd}\cdot\frac{Cn}{An}=1,$$

et, par suite,

$$\frac{Ag.Ah.Ai}{Bg.Bh.Bi}\cdot\frac{Bd.Be.Bf}{Cd.Ce.Cf}\cdot\frac{Ca.Ca'.Cn}{Aa.Aa'.An}=1.$$

Mais les segments AC, bc, $a'n$ sont en involution, comme interceptés sur le côté AC par trois coniques circonscrites au quadrilatère $deh\varepsilon$, savoir : (BC, BA), (dh, $e\varepsilon$), $bcdhe\varepsilon$.

On a donc

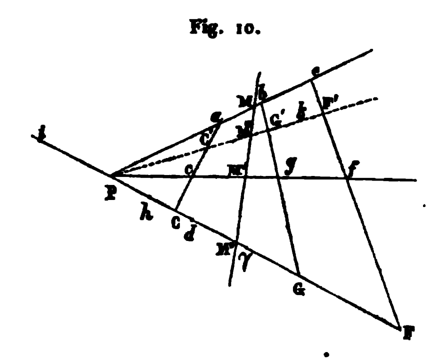
$$\frac{Ca'.C\eta}{Aa'.A\eta} = \frac{Cb.Cc}{Ab.Ac},$$

et l'équation précédente devient celle qui exprime le théorème de Carnot appliqué aux cubiques.

En supposant un des sommets du triangle à l'infini, on arrive au théorème de Newton.

IX. *Théorème de Cotes.* — Prenons sur trois droites convergentes en P les huit points *a*, *b*, *e*, *c*, *g*, *f*, *d*, *h* répartis comme l'indique la *fig.* 10. Toutes les cubiques

Fig. 10.



passant par ces huit points ont évidemment leur neuvième intersection sur la droite P*dh*. Pour trouver ce neuvième point *i*, il suffit, en prenant *abcd* pour base, de circonscrire au quadrilatère *efgh* une conique capable du rapport *abcd*(*e*, *f*, *g*, *h*) et de chercher le second point où elle coupe P*d*. Si maintenant, les sept points *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g* restant fixes, *h* se déplace sur la droite P*d*, il est évident que les segments tels que *hi* seront en involution; P est un des points doubles.

Soient F, G, C les intersections de *ef*, *bg*, *ac* avec P*d*, γ le second point d'intersection de la conique *abcdg*

avec Pd; quand h vient en F, i coïncide avec γ, de sorte que Fγ est un des segments de l'involution. On a donc

$$\frac{1}{Pi}+\frac{1}{Ph}=\frac{1}{P\gamma}+\frac{1}{PF}$$

et

$$\frac{1}{Pd}+\frac{1}{Pi}+\frac{1}{Ph}=\frac{1}{Pd}+\frac{1}{P\gamma}+\frac{1}{PF}.$$

Mais γd est le segment intercepté par la conique $abcdg$, on a donc

$$\frac{1}{P\gamma}+\frac{1}{Pd}=\frac{1}{PC}+\frac{1}{PG};$$

donc enfin

$$\frac{1}{Pd}+\frac{1}{Pi}+\frac{1}{Ph}=\frac{1}{PC}+\frac{1}{PG}+\frac{1}{PF},$$

c'est-à-dire que le centre des moyennes harmoniques de P par rapport à d, h, i est le même que par rapport à C, G, F; il se trouve donc sur la droite MM′ qui joint les centres des moyennes harmoniques de P relatifs aux deux groupes a, b, e et c, g, f. Le théorème de Cotes se conclut de ce qui précède; qu'on imagine une quatrième transversale issue de P; on pourra assigner un point k sur cette droite pour achever de déterminer la cubique passant par le groupe $a, b, c, \ldots, i$. Les points l, m où Pk rencontre la courbe satisfont encore à la condition

$$\frac{1}{Pk}+\frac{1}{Pl}+\frac{1}{Pm}=\frac{1}{PC'}+\frac{1}{PG'}+\frac{1}{PF'}.$$

En effet, si l'on joint dc, ig, hf qui rencontrent Pk en C_1, G_1, F_1, le centre des moyennes harmoniques de k, l, m sera le même que celui de C_1, G_1, F_1 ou de C′, G′, F′; il sera en M‴ sur la droite M′M″.

Corollaire. — Si les transversales Pa, Pc coïncident,

les points C, G, F deviennent les intersections des tangentes en a, b, c avec la transversale Pd, et l'on a ce théorème de Maclaurin :

Si par un point P *on mène une sécante et les tangentes aux points où elle coupe la courbe, l'axe des moyennes harmoniques des tangentes est le même que celui du point* P *par rapport à la courbe.*

X. *Polaires coniques des courbes du troisième ordre.* — Étant donnés sur une droite un point P et un groupe de trois autres points a, b, c, les conjugués de P relatifs à ce groupe sont des points tels que P est le centre des moyennes harmoniques de chacun d'eux par rapport à a, b, c. Si l'on prend P pour origine, les conjugués sont donnés par l'équation

$$x^2(a+b+c) - 2x(ab+ac+bc) + 3abc = 0,$$

a, b, c désignant les distances Pa, Pb, Pc. Ces points divisent harmoniquement le segment formé par P et par son centre harmonique relatif à a, b, c.

On peut construire géométriquement les conjugués de la manière suivante :

Il est d'abord évident que, si P se déplace sur la droite, ses conjugués forment un système de segments en involution (principe de correspondance) ; si P coïncide avec a, ses conjugués sont le point a lui-même, et le conjugué harmonique α de a par rapport à bc. On a donc immédiatement trois segments de l'involution, $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ (β, γ étant les conjugués harmoniques de b, c par rapport à ac, ab).

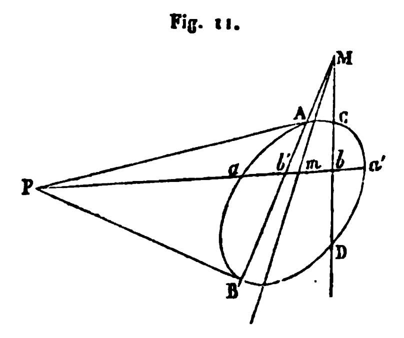
Pour obtenir les conjugués de P, il faudra construire un segment xy tel que l'on ait

$$\text{rapport anharmonique} = (xy, a\alpha, b\beta, c\gamma) = (\text{P}, a, b, c).$$

On peut aussi faire intervenir le centre des moyennes harmoniques p, en remarquant que les conjugués forment une involution avec les segments formés, d'une part, par deux des points donnés, de l'autre, par le troisième et par le conjugué harmonique de P relatif aux deux premiers. Ils sont, de plus, conjugués harmoniques l'un de l'autre par rapport à P et p ; on est ainsi ramené à un problème connu (Chasles : *Traité des sections coniques*, n° 153).

La polaire d'un point P par rapport à une cubique est le lieu de ses conjugués par rapport aux groupes de trois points situés sur toutes les transversales qui passent en P. Je démontrerai d'abord que la polaire d'un point par rapport au système composé d'une droite CD et d'une conique est une autre conique. Soit MAB la polaire rectiligne de P relativement à la conique seule; soit Mm l'axe

Fig. 11.



des moyennes harmoniques du système (*fig.* 11). On voit d'abord que les quatre points A, B, C, D appartiennent au lieu cherché.

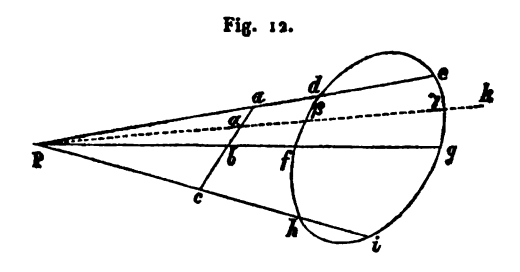
Menons une transversale Paa'; les conjugués de P par rapport aux points a, a', b sont en involution avec aa', bb', et, de plus, ils divisent harmoniquement le segment Pm; donc ils appartiennent à une conique passant

en A, B, C, D, et dont la polaire relative à P est la droite M*m*.

Lorsque la conique donnée se réduit à un système de deux droites, la polaire de P par rapport au triangle est une conique passant par les trois sommets.

Je considère maintenant une cubique quelconque; je coupe la courbe par une transversale *abc*, et je mène les rayons P*a*, P*b*, P*c*. Leurs six autres points d'intersection *d*, *e*, *f*, *g*, *h*, *i* appartiendront à une même conique.

Fig. 12.



Soit *k* un dixième point qui achève de déterminer la courbe du troisième ordre; les conjugués de P par rapport aux trois points k, k', k'' situés sur la transversale P*k* (*fig.* 12) seront les mêmes que par rapport aux points α, β, γ, où cette ligne coupe la conique et la droite *abc*. En effet, si *k* se déplace sur la transversale, les conjugués de P relatifs au système variable k, k', k'' formeront une série de segments en involution; car ils divisent harmoniquement le segment P*m* déterminé par l'axe des moyennes harmoniques, axe qui ne varie pas. Mais, lorsque *k* coïncide avec α, β ou γ, le segment est le même : c'est celui qui correspond au groupe $(\alpha\beta\gamma)$; lorsque *k* vient en P, k' et k'' se confondent avec lui, ainsi que les conjugués, car alors la cubique devient un système de trois droites convergentes. Il en résulte que la série de segments se réduit

à un segment unique, celui qui correspond à $(\alpha\beta\gamma)$ (*). La polaire de P relative à une courbe quelconque du troisième ordre, passant par les neuf points a, b, c,...i, est donc la même que par rapport au système composé de la droite abc et de la conique $defghi$; c'est une autre conique.

Construction des tangentes issues d'un point d'une cubique. — Ce problème revient à trouver les intersections d'une courbe du troisième ordre et de la polaire d'un de ses points, conique qui a deux points infiniment voisins communs avec la courbe ; il peut être résolu géométriquement de la manière suivante.

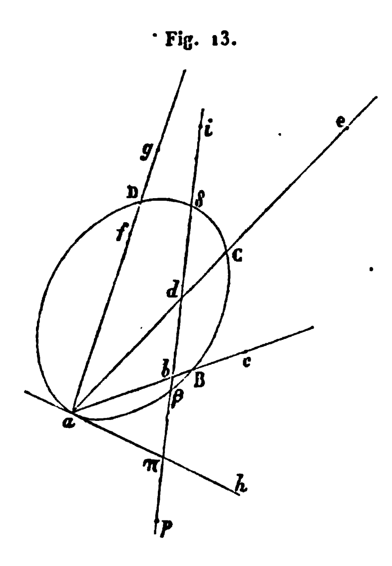
Quels que soient les neuf points qui définissent une courbe du troisième ordre, on pourra toujours mener la tangente en a et trouver les points de la courbe b, c, d, e, f, g situés sur trois transversales issues de ce point. Les conjugués harmoniques de a(B, C, D) par rapport aux trois couples bc, de, fg et la tangente ah détermineront la conique polaire. Menons la droite bd et soit i le troisième point de la cubique situé sur cette droite. On peut considérer l'ensemble de la conique aBCD et de la droite bd comme une cubique ayant avec la proposée cinq points communs (aa), b, d, i (*fig.* 13). Si l'on prend pour base $(aa)bd$, il est facile de voir que le pivot p

---

(*) C'est ce qu'il est très-facile de reconnaître ; menons, en effet, par le point P une droite quelconque $P\mu$ sur laquelle nous porterons les distances de P aux milieux μ des segments formés par les conjugués de ce point relatifs aux divers groupes k, k', k''. On a ainsi deux droites divisées homographiquement $P\mu$ et Pk. Le point P sur Pk coïncide avec son homologue sur $P\mu$; aux points α, β correspond un même point μ. μ correspond donc à tous les points k, puisque les droites qui joignent les points homologues sont convergentes. L'examen de l'équation anharmonique $xy + ax + by + c = 0$ conduirait au même résultat ; si l'on doit avoir $y = 0$ pour $x = 0$, et $y = \mu$ pour $x = \alpha$ et $x = \beta$, elle devient $x(y - \mu) = 0$, et l'on a $y = \mu$, quel que soit x.

relatif au système de la conique et de la droite sera le sixième point d'une involution déterminée par les segments bd, $\beta\delta$ et par le point π où bd rencontre ah.

Fig. 13.



Soit P le pivot de la cubique donnée, relatif à la même base. A une conique quelconque du faisceau commun correspondent deux rayons, un dans le faisceau P, un dans le faisceau p. Menons Pc, Pe, Pg, et cherchons les homologues $p\gamma$, $p\epsilon$, $p\chi$; la conique menée par les points p, P et par les intersections respectives de ces trois couples de droites contiendra évidemment les autres points communs aux deux cubiques, ou, ce qui revient au même, les points communs à la cubique donnée et à sa polaire aBCD.

Propriété des polaires de tous les points d'une droite. — Diamètres coniques et courbe centrale. — Les polaires de deux points a, b d'une droite se coupent en quatre points; si l'on considère l'un quelconque d'entre

eux p, son axe des moyennes harmoniques sera la droite ab. Si l'on mène une droite quelconque pc, le point c où elle rencontre ab sera le centre des moyennes harmoniques de p relatif aux trois points de la cubique situés sur la transversale; donc p est un des conjugués de c, il appartient aux polaires de tous les points de la droite ab. Ainsi les polaires de tous les points d'une droite passent par quatre points, pôles harmoniques de cette droite.

Si l'on considère la droite à l'infini, chacun de ses points a pour polaire une conique qui est un diamètre; tous les diamètres passent par quatre points pôles de l'infini. Leurs centres sont donc sur une conique qui est la conique centrale; elle est en même temps le lieu des points dont les polaires coniques sont des paraboles. Que l'on conçoive en effet, par un des points de la conique centrale, une transversale parallèle à la direction qui détermine le diamètre dont ce point est le centre; si l'on cherche les conjugués du point, l'un d'eux sera à l'infini, car le point en question est le centre des moyennes distances des points de la cubique situés sur la transversale. Toute autre direction donnerait deux conjugués à distance finie.

Enfin il est évident que, si par un point on mène une infinité de transversales, les quatre pôles harmoniques de toutes ces droites parcourront la polaire conique du point.

(*La suite prochainement.*)

NOTE SUR LES QUESTIONS 1045 ET 1026;

PAR M. LIONNET.

---

1. Théorème. — *La différence des périmètres p et P de deux polygones réguliers d'un même nombre n de côtés supérieur à 5, l'un inscrit et l'autre circonscrit au même cercle, est moindre que le côté AB du polygone inscrit.*

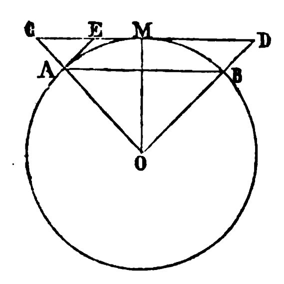
Soit CD le côté de P, tangent au milieu M de l'arc AB et divisé par ce point en deux parties égales. Il s'agit de démontrer que, pour $n > 5$, on a

$$CD.n - AB.n < AB \quad \text{ou} \quad CD - AB < \frac{AB}{n},$$

ou

$$(1) \qquad CA < \frac{1}{n},$$

en remplaçant CD, AB par les rayons OC, OA qui leur sont proportionnels, et prenant OA pour unité. Mais



la tangente CM, égale à $\frac{P}{2n}$, étant moyenne proportionnelle entre la sécante entière $CA + 2$ et le segment CA,

on a

$$\frac{P^2}{4n^2} = (CA + 2)\,CA.$$

Remplaçant CA par $\frac{1}{n}$ et multipliant les deux membres par n^2, on a

(2) $$\left(\frac{P}{2}\right)^2 < 2n+1.$$

Cette inégalité, équivalente à (1), devenant $12 < 13$ pour $n = 6$, est vérifiée par cette valeur de n. Elle l'est aussi pour $n > 6$, puisque, n augmentant, P diminue; donc le théorème est démontré.

Remarque I. — Pour $n < 6$, le premier membre de (2) est supérieur à 12, tandis que le second est égal ou inférieur à 11; donc alors l'inégalité a lieu en sens contraire; ce qui justifie la restriction $n > 5$.

Remarque II. — Si l'on désigne par P' le périmètre du polygone circonscrit de $2n$ côtés, par b, b' les côtés de P, P', et qu'on mène au point A la tangente AE jusqu'à sa rencontre avec CD, les triangles semblables CAE, CMO, dans lesquels on a

$$AE = \frac{b'}{2}, \quad CM = \frac{b}{2}, \quad OM = 1,$$

donneront

$$CA = \frac{bb'}{4} = \frac{Pb'}{4n} = \frac{bP'}{8n} = \frac{PP'}{8n^2};$$

d'où, en remplaçant CA par $\frac{1}{n}$, on déduit les inégalités

(3) $$Pb' < 4, \quad bP' < 8, \quad PP' < 8n,$$

dont chacune, équivalente à (1), peut servir comme l'inégalité (2) à la démonstration du théorème.

2. Théorème. — *L'excès de la circonférence sur le*

la figure F′ est égal à l'angle sous lequel on voit, du centre d'homologie, les traces sur la droite I (qui correspond à l'infini de la figure F′) des côtés de l'angle homologique.

Tel est le principe qui nous sert pour la transformation des angles dans les figures homologiques. Les applications sont nombreuses.

Considérons, par exemple, un cercle et deux points fixes sur le cercle; ces deux points sont vus d'un point quelconque du cercle sous un angle constant. Si l'on fait la figure homologique en prenant pour centre d'homologie le centre du cercle, on obtient le théorème 413 que j'ai proposé en question (année 1857), mais si l'on prend un centre d'homologie quelconque, on obtient l'énoncé de M. Transon. Au reste, ce théorème n'est lui-même qu'un cas particulier du suivant, que j'ai donné il y a quelques années dans le *Bulletin de la Société de statistique du département de l'Isère*. « On donne le foyer f et l'un des plans directeurs d'une surface du second degré. Si l'on prend deux points fixes sur une conique quelconque tracée sur la surface et que l'on joigne ces points à un point quelconque de cette conique, les traces de ces droites sur le plan directeur sont vues du foyer sous un angle constant. »

Ce qui précède montre que le théorème tel qu'il est énoncé par M. Transon n'est évident qu'autant que la droite D ne rencontre pas la conique.

La démonstration directe du théorème n'est pas difficile à donner, il suffit d'appliquer la proposition 171 de la *Géométrie supérieure*.

Note. — La même question a été résolue par MM. Doucet, professeur au lycée de Lyon; Lecornu, élève du lycée de Caen; A. Pellissier, capitaine d'Artillerie.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 631

(voir 2e série, t. I, p. 383);

PAR M. LE BESGUE.

Cette question doit être posée ainsi, en y corrigeant une erreur de copie et une faute d'impression,

Si l'équation $x^2 = y^4 + ay^2z^2 + bz^4$ *est résolue par* $r^2 = t^4 + at^2u^2 + bu^4$, *elle le sera aussi par*

(A) $x = r^4 - (a^2 - 4b)t^4u^4,\quad y = t^4 - bu^4,\quad z = 2rtu.$

Voici la vérification directe.

Remplaçant x et z par leurs valeurs, on trouve réduction faite,

$$[r^4 + (a^2 - 4b)t^4u^4]^2 = (y^2 + 2ar^2t^2u^2)^2.$$

Prenant la racine carrée, il vient, réduction faite,

$$y^2 = (r^2 - at^2u^2)^2 - 4bt^4u^4.$$

Remplaçant y par sa valeur, il vient, réduction faite,

$$(r^2 - at^2u^2)^2 = (t^4 + bu^4)^2.$$

Prenant la racine carrée, il vient

$$r^2 = t^4 + at^2u^2 + bu^4.$$

Cette dernière équation est la relation qui doit exister entre r, t, u pour que les formules (A) donnent une solution de

$$x^2 = y^4 + ay^2z^2 + bz^4.$$

6.

Dans ce calcul, il y avait deux racines carrées à prendre; les signes des racines pouvaient changer, ainsi la seconde extraction aurait donné, en prenant le signe —,

$$r^2 - at^2u^2 = -t^4 - bu^4,$$

et, si la relation

$$r^2 = -t^4 + at^2u^2 - bu^4$$

pouvait être satisfaite, on pourait encore employer les formules (A).

Si l'on prend pour application l'équation

$$x^2 = y^4 + 5y^2z^2 + 3z^4,$$

comme

$$x = 3, \quad y = z = 1$$

donnent

$$3^2 = 1^4 + 5.1^2.1^2 + 3.1^4 \quad (r^2 = t^4 + 5t^2u^2 + 3u^4),$$

les formules (A) donnent une nouvelle solution

$$x = 68, \quad y = -2, \quad z = 6;$$

comme

$$r^2 = -t^4 + 5t^2u^2 - 3u^4$$

est satisfaite par

$$r = t = u = 1,$$

les formules (A) donnent encore la solution

$$x = 12, \quad y = 2, \quad z = 2.$$

Voici comment les formules (A) ont été trouvées. Dans l'équation $x^2 = y^4 + ay^2z^2 + bz^4$, on a fait $z = 2z_1$, d'où l'on a tiré

$$x^2 = (y^2 + 2az_1^2)^2 - 4(a^2 - 4b)z_1^4,$$

ou bien encore

$$(y^2 + 2az_1^2)^2 - x^2 = 4(a^2 - 4b)z_1^4,$$

puis on a décomposé $4(a^2-4b)z_1^4$ en deux facteurs, l'un que l'on a supposé égal à $y^2+2az_1^2+x$, et l'autre par conséquent égal à y^2+2az_1-x. En posant $z_1=rs$ et prenant $2r^4$, $2(a^2-4b)s^4$ pour les deux facteurs de $4(a^2-4b)z_1^4$, on a eu les deux équations

$$y^2+2ar^2s^2+x=2r^4,\quad y^2+2ar^2s^2-x=2(a^2-4b)s^4;$$

de là, par soustraction,

$$x=r^4-(a^2-4b)s^4,$$

et, par addition,

$$y^2=r^4-2ar^2s^2+(a^2-4b)s^4,$$

ou bien

$$y^2=(r^2-as^2)^2-4bs^4,$$

qui revient à

$$(r^2-as^2+y)(r^2-as^2-y)=4bs^4.$$

En posant $s=tu$ et décomposant $4bs^4$ en $2t^4$, $2bu^4$, on a fait

$$r^2-at^2u+y=2t^4,\quad r^2-at^2u^2-y=2bu^4,$$

d'où l'on a tiré, par soustraction,

$$y=t^4-bu^4,$$

et, par addition,

$$r^2=t^4+at^2u^2+bu^4.$$

Comme

$$z=2z_1=2rs=2rtu$$

et

$$x=r^4-(a^2-4b)s^4=r^4-(a^2-4b)t^4u^4,$$

l'équation

$$x^2=y^4+ay^2z^2+bz^4$$

se trouve résolue par les formules (A), en admettant la condition

$$r^2=t^4+at^2u^2+bu^4.$$

Nota. — La décomposition de $4bt^4u^4$ en $-2t^4$, $-2bu^4$ aurait donné la condition

$$r^2 = -t^4 + at^2u^2 - bu^4.$$

Ces décompositions donnent rarement des solutions complètes; mais, dans certains cas, elles font reconnaître l'impossibilité de diverses équations biquadratiques par la méthode de *non congruence* qui consiste à trouver un nombre entier m (module) tel que, les deux membres de l'équation $P = Q$ étant divisés par m, les restes supposés positifs et inférieurs à m ne sauraient être égaux.

Question 990

(voir 2e série, t. IX, p. 192);

PAR M. ERNEST PADOVA,
Élève à l'École Normale de Pise.

On donne un tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ *et un point* O. *Désignant par* V_1 *le volume* $OA_2A_3A_4$, *par* V_2 *le volume* $OA_1A_3A_4, \ldots$, *on aura la relation*

$$\Sigma\overline{OA_1}^2\,V_1^2 + 2\Sigma\overline{OA_2}\,\overline{OA_3}\cos\widehat{A_2OA_3}\,V_2V_3 = 0.$$

Les volumes V_1, V_2, V_3, V_4 *doivent être affectés d'un signe tel que leur somme soit égale au volume du tétraèdre donné.* (H. FAURE.)

Si l'on appelle x_1, y_1, z_1, t_1 les perpendiculaires abaissées du point O sur les faces opposées aux sommets A_1, A_2, A_3, A_4, respectivement, du tétraèdre donné, et x', y', z', t' les perpendiculaires abaissées de ces sommets mêmes sur les faces opposées, on aura

$$(1)\quad V_1:\Delta = x_1:x',\quad V_2:\Delta = y_1:y',\quad V_3:\Delta = z_1:z',\quad V_4:\Delta = t_1:t',$$

où Δ représente le volume du tétraèdre donné.

Du moment que l'on doit avoir

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = \Delta,$$

il faut que l'on ait

$$\frac{x_1}{x'}+\frac{y_1}{y'}+\frac{z_1}{z'}+\frac{t_1}{t'}=1.$$

En substituant pour V_1, V_2, V_3, V_4 leurs valeurs déduites des équations (1) dans l'équation à démontrer, et en divisant l'équation qui en résulte par Δ^2, nous aurons

$$\Sigma\overline{OA}_1^2\frac{x_1^2}{x'^2}+2\Sigma\overline{OA_2}\,\overline{OA_3}\cos\widehat{A_2OA_3}\frac{x_1}{x'}\frac{y_1}{y'}=0.$$

Pour démontrer cette nouvelle équation, il faut et il suffit de montrer que, si à partir du point O, sur les droites qui de ce point vont aux quatre sommets du tétraèdre, on coupe des segments respectivement égaux à $OA_1\frac{x_1}{x'}$, $OA_2\frac{y_1}{y'}$, $OA_3\frac{z_1}{z'}$, $OA_4\frac{t_1}{t'}$, ces segments se font équilibre entre eux quand on les considère comme des forces.

Pour cela, il suffit de projeter ces droites sur les perpendiculaires aux faces du tétraèdre, et de montrer que toutes ces projections sont nulles. Or la projection sur la perpendiculaire à la face $A_2\,A_3\,A_4$ donne

$$OA_1\frac{x_1}{x'}\cos xOA_1+OA_2\frac{y_1}{y'}\cos xOA_2$$
$$+OA_3\frac{z_1}{z'}\cos xOA_3+OA_4\frac{t_1}{t'}\cos xOA_4,$$

et puisque

$$OA_1\cos xOA_1=x_1-x',$$
$$OA_2\cos xOA_2=OA_3\cos xOA_3=OA_4\cos xOA_4=x_1,$$

cette projection devient

$$x_1\left(\frac{x_1}{x'}+\frac{y_1}{y'}+\frac{z_1}{z'}+\frac{t_1}{t'}-1\right),$$

et par conséquent est égale à zéro. Donc les forces $OA_1 \frac{x_1}{x'}$, $OA_2 \frac{y_1}{y'}$, $OA_3 \frac{z_1}{z'}$, $OA_4 \frac{t_1}{t'}$, se font équilibre autour du point O, et la question est résolue.

Question 1039

(voir 1e série, t. X, p. 384);

PAR M. WILLIAM MYNN PHORNTON,
Étudiant à l'Université de Virginie (États-Unis).

Trouver l'équation du lieu des sommets des paraboles inscrites à un triangle rectangle, celle du lieu des pieds des normales issues du sommet de l'angle droit, et celle du lieu des seconds points de rencontre de ces normales avec les courbes. (H. LEMONNIER.)

Prenant les côtés a et b du triangle pour axes, l'équation de la courbe est de la forme

$$(1) \qquad \sqrt{\frac{y}{\beta}} \pm \sqrt{\frac{x}{\alpha}} = 1;$$

et, pour exprimer qu'elle est aussi tangente à l'hypoténuse, on a la condition

$$(2) \qquad \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} = 1.$$

I. Observant maintenant que la perpendiculaire menée de l'origine à la corde focale

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1$$

passe par le foyer, et qu'une droite menée par le foyer et coupant l'axe des x sous un angle égal à $\operatorname{arctang} \frac{\beta}{\alpha}$

est l'axe de la courbe, on obtient aisément, pour l'équation de cet axe,

$$(3) \qquad \frac{y}{\beta} - \frac{x}{\alpha} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Divisant l'équation (3) par l'équation (1), on a

$$\sqrt{\frac{y}{\beta}} \mp \sqrt{\frac{x}{\alpha}} = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2},$$

d'où, par addition et soustraction avec l'équation (1), et en tenant compte de l'équation (2),

$$\frac{x}{\beta^3} = \frac{y}{\alpha^3} = \frac{\alpha\beta}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} = \frac{\left(ax^{\frac{1}{3}} + by^{\frac{1}{3}}\right)^3}{(\alpha\beta)^3} = \frac{\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}}{(\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{3}{2}}},$$

et enfin

$$ax^{\frac{1}{3}} + by^{\frac{1}{3}} = \left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)^2.$$

II. L'équation générale de la normale en un point (x, y) est

$$(x' - x)\sqrt{\alpha x} = (y' - y)\sqrt{\beta y};$$

mais, puisqu'elle passe par l'origine,

$$\alpha x^3 = \beta y^3,$$

l'équation devient donc

$$(4) \qquad \alpha^{\frac{1}{3}} x' = \beta^{\frac{1}{3}} y'.$$

Pour trouver le lieu du pied de la normale, on élimine α et β entre les équations (2), (4) et l'équation de la courbe

$$\sqrt{\frac{y}{\beta}} + \sqrt{\frac{x}{\alpha}} = 1;$$

il vient

$$\frac{x}{\beta^{\frac{1}{3}}} = \frac{y}{\alpha^{\frac{1}{3}}} = \frac{(ax^3 + by^3)^{\frac{1}{3}}}{(\alpha\beta)^{\frac{1}{3}}} = \frac{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}{\left(\alpha^{\frac{2}{3}} + \beta^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\alpha\beta}{\left(\alpha^{\frac{2}{3}} + \beta^{\frac{2}{3}}\right)^2},$$

et enfin

$$ax^3 + by^3 = (x^2 + y^2)^2.$$

III. Pour trouver le lieu des seconds points de rencontre, on élimine α et β entre les équations (2), (4) et l'équation de la courbe

$$\sqrt{\frac{y}{\beta}} - \sqrt{\frac{x}{\alpha}} = 1;$$

il vient ainsi

$$ax^3 + by^3 = (x^2 - y^2)^2.$$

Note. — La même question a été résolue par M. Gambey, professeur au lycée de Saint-Étienne.

Question 1045

(voir 2e série, t. X, p. 556);

PAR M. A. DUREL,

Élève de Mathématiques élémentaires au lycée du Havre.

La différence des contours de deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés supérieur à cinq, l'un inscrit et l'autre circonscrit à un même cercle, est moindre que le côté du polygone inscrit. (LIONNET.)

Soient n le nombre des côtés des deux polygones, a le côté du polygone inscrit et a' celui du polygone circonscrit : il faut démontrer que l'on a

$$na' - na < a,$$

ou

$$(1) \qquad na' < (n+1)a.$$

Or on a

$$a' = 2r \operatorname{tang} \frac{2\pi}{2n} = 2r \operatorname{tang} \frac{\pi}{n},$$

$$a = 2r \sin \frac{2\pi}{2n} = 2r \sin \frac{\pi}{n};$$

l'inégalité peut donc être mise sous la forme

$$2nr \operatorname{tang} \frac{\pi}{n} < (n+1) 2r \sin \frac{\pi}{n},$$

ou

$$2nr \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} < (n+1) 2r \sin \frac{\pi}{n},$$

et, en divisant les deux membres par $2r \sin \frac{\pi}{n}$,

$$n \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n}} < n+1;$$

d'où l'on tire

(2) $$\cos \frac{\pi}{n} > \frac{n}{n+1}.$$

Or on a

$$\cos \frac{\pi}{n} > 1 - \frac{\pi^2}{2n^2};$$

par suite, si l'inégalité $1 - \frac{\pi}{2n^2} > \frac{n}{n+1}$ est satisfaite, l'inégalité (2) sera vraie, *à fortiori*,

$$\frac{\pi^2}{2n^2} > 1 - \frac{n}{n+1}, \quad \text{ou} \quad \frac{\pi^2}{2n^2} < \frac{1}{n+1},$$

$$\pi^2 < \frac{2n^2}{n+1}, \quad \text{ou} \quad \pi^2 < \frac{2n}{1+\frac{1}{n}}.$$

Si n est égal à 6, l'inégalité subsiste; car π^2 est plus petit que $\frac{12}{1+\frac{1}{6}} = \frac{72}{7}$. Or, à mesure que le nombre n des côtés augmente, le numérateur $2n$ augmente, le dénominateur diminue; par suite, l'inégalité reste vraie.

Question 1047

(voir 2[e] série, t. X, p. 557);

PAR M. H. HELDERMAN,

Professeur de Mathématiques, ancien Élève de l'École Polytechnique de Delft.

A, B, C étant les angles d'un triangle rectiligne, on a

$$\frac{\cos A}{\sin B \sin C} + \frac{\cos B}{\sin A \sin C} + \frac{\cos C}{\sin A \sin B} = 2.$$

(J.-CH. DUPAIN.)

On sait qu'on peut déduire, par une simple substitution, des formules fondamentales

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B,$$
$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B,$$

les suivantes

$$(1) \left\{ \begin{aligned} \sin(A+B+C) = &+ \sin A \cos B \cos C + \sin B \cos A \cos C \\ &+ \sin C \cos A \cos B - \sin A \sin B \sin C, \end{aligned} \right.$$

$$(2) \left\{ \begin{aligned} \sin(A+B-C) = &+ \sin A \cos B \cos C + \sin B \cos A \cos C \\ &- \sin C \cos A \cos B + \sin A \sin B \sin C, \\ \sin(A+C-B) = &+ \sin A \cos B \cos C - \sin B \cos A \cos C \\ &+ \sin C \cos A \cos B + \sin A \sin B \sin C, \\ \sin(B+C-A) = &- \sin A \cos B \cos C + \sin B \cos A \cos C \\ &+ \sin C \cos A \cos B + \sin A \sin B \sin C. \end{aligned} \right.$$

La somme des équations (1) et (2) donne

$$(3) \left\{ \begin{aligned} +4 \sin A \sin B \sin C = &\sin(A+B-C) + \sin(A+C-B) \\ &+ \sin(B+C-A) - \sin(A+B+C). \end{aligned} \right.$$

En ayant égard que la somme des angles d'un triangle

rectiligne est égale à π, la formule (3) devient

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C;$$

d'où l'on peut déduire

$$\frac{2 \sin A \cos A}{2 \sin A \sin B \sin C} + \frac{2 \sin B \cos B}{2 \sin A \sin B \sin C} + \frac{2 \sin C \cos C}{2 \sin A \sin B \sin C} = 2,$$

ou

$$\frac{\cos A}{\sin B \sin C} + \frac{\cos B}{\sin A \sin C} + \frac{\cos C}{\sin A \sin B} = 2.$$

C. Q. F. D.

Note. — La même question a été résolue par MM. C. Guesnet, élève du lycée du Havre; H. Lez; Lecornu, élève du lycée de Caen; A. Pellissier, capitaine d'Artillerie; S. Dautheville; E. Kruschwitz, étudiant, à Berlin.

CORRESPONDANCE.

Avis. — Nous rendrons compte des Ouvrages, Mémoires et Journaux qu'on voudra bien nous adresser et qui rentreront dans le cadre de notre publication.

1. Nous avons reçu le premier cahier du tome V des *Annali di Matematica*. Il renferme, entre autres choses, la solution de la question 252 proposée en ces termes à la page 114 du tome XI des *Nouvelles Annales :*

En ôtant les doubles du jeu ordinaire du domino, il reste vingt et une pièces. On peut ranger ces vingt et une pièces sur une seule ligne, conformément à la règle du jeu. De combien de manières cet arrangement est-il possible?

Cette solution, due à feu M. le Dr Reiss, de Francfort, ne sera complète que dans le prochain cahier.

2. Nous avons reçu de M. *C. Bergmans*, professeur à Gand, un Mémoire sur les *applications d'une forme particulière de l'équation de la ligne droite ;* cette forme est la suivante :

$$\frac{x-\alpha}{m}=\frac{y-\beta}{n}=\rho,$$

où α et β sont les coordonnées d'un point fixe, et x et y celles d'un point variable situé à une distance du point fixe égale à ρ en grandeur et en signe. L'auteur traite très-simplement à l'aide de cette forme quelques problèmes du cours, et exprime en terminant le désir de la voir s'introduire dans l'enseignement de la Géométrie analytique. Ce désir est depuis longtemps réalisé dans nos classes de Mathématiques spéciales.

3. Nous avons reçu de M. *Arthur Boulangier,* élève du lycée de Rennes, un Mémoire *sur le mouvement d'une figure plane qui glisse sur une autre en restant semblable à elle-même.* L'auteur y reproduit, en les généralisant, les théorèmes énoncés en 1866 (*voir* 2[e] série, t. V, p. 480) par M. Julius Petersen, de Copenhague, et démontrés en février 1867, par M. Robert Durand, élève du lycée de Caen. La démonstration de ces théorèmes a été reprise en mai 1867, dans les *Annali di Matematica,* par M. Christian Wiener, de Carlsruhe, qui a attribué à tort à M. Petersen une erreur de démonstration commise par M. Durand, et consistant à croire que des triangles polaires réciproques de deux triangles semblables sont semblables.

4. La question 979, dont la solution a paru en janvier, a été également résolue par M. Moret-Blanc.

Ch. B.

QUESTIONS.

1057. En un point M d'un tore, on mène une droite MT située dans le plan tangent. Soient a et b les points où cette droite coupe la surface; menons les deux sphères qui, passant par M, touchent la surface aux points a et b. Désignons par α et β les centres de ces sphères, et par I le point milieu du segment $\alpha\beta$.

Cela posé, si, par le point M, nous menons une droite parallèle à la droite qui joint le point I au centre du tore, dirigée dans le même sens et de longueur double, le point extrême de cette droite est le centre de courbure de la section faite dans le tore par le plan normal passant par MT. (LAGUERRE.)

1058. On donne une cyclide et une sphère; leur courbe d'intersection est une courbe du quatrième ordre, par laquelle on peut faire passer quatre cônes. Deux des sommets de ces cônes se trouvent respectivement sur chacun des axes de la surface (*); lorsque le centre de la sphère est fixe et que son rayon varie, ces deux sommets décrivent les axes : quel est le lieu décrit par les sommets des deux autres cônes? (LAGUERRE.)

1059. Tout nombre entier est la somme d'un carré et de deux nombres triangulaires. (LIONNET.)

1060. Tout nombre entier est la somme de deux carrés et d'un nombre triangulaire. (LIONNET.)

(*) *Voir* MANNHEIM, *Applications*, etc. (*Nouvelles Annales*, t. XIX, p. 73). « Les axes de la cyclide sont les droites fixes par lesquelles passent respectivement les plans des lignes de courbure de chaque système. »

1061. Tout nombre impair est la somme de quatre carrés dont deux sont consécutifs.

(LIONNET.)

1062. Démontrer l'identité suivante

$$[1 - 2(a+b+c+\dots)x + (a+b+c+\dots)(aA^2 + bB^2 + cC^2 + \dots)]^{-\frac{1}{2}}$$
$$= \sum\sum\sum \frac{a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma}\dots}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\dots 2^{\alpha+\beta+\gamma+\dots}} \frac{d^{\alpha+\beta+\gamma+\dots}(x^2 - A^2)^{\alpha}(x^2 - B^2)^{\beta}(x^2 - C^2)^{\gamma}\dots}{dx^{\alpha+\beta+\gamma\dots}},$$

les sommations s'étendant à toutes les valeurs entières et positives de α, β, γ et $\alpha!$ étant supposé devenir égal à 1, quand $\alpha = 0$. (F. DIDON.)

1063. $f(x, y)$ et $\varphi(x, y)$ désignent deux fonctions entières de x et de y; $y_1, y_2, \dots$ sont les racines de l'équation en y, $f(x, y) = 0$, et $x_1, x_2, \dots$ les racines de la même équation, dans laquelle x est seule traitée comme inconnue; enfin $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \dots$ représentent les solutions du système d'équations $f(x, y) = 0$, $\varphi(x, y) = 0$.

Démontrer la relation

$$\sum_i \frac{1}{(x-\alpha_i)(y-\beta_i)} = \sum_j \frac{1}{y - y_j} \frac{\dfrac{d\varphi(x, y_j)}{dx}}{\varphi(x, y_j)} + \sum_k \frac{1}{x - x_k} \frac{\dfrac{d\varphi(x_k, y)}{dy}}{\varphi(x_k, y)}.$$

(F. DIDON.)

1064. On a une courbe fermée, plane et convexe. Si $d\sigma$ désigne un élément superficiel infiniment petit extérieur à la courbe, θ l'angle sous lequel on voit la courbe de cet élément, et t, t' les longueurs des tangentes à la courbe issues de l'élément, la somme de toutes les quantités $\frac{d\sigma \sin\theta}{tt'}$, se rapportant à tous les éléments $d\sigma$ du plan extérieurs à la courbe, est égale à $2\pi^2$. (F. DIDON.)

ÉTUDE D'UN COMPLEXE DU SECOND ORDRE

(suite, voir même tome, p. 49);

PAR M. PAINVIN.

11. La surface Δ, comme nous le verrons par l'analyse suivante, se compose de deux nappes distinctes, qui viennent se raccorder en quatre points coniques réels. Il est entendu, une fois pour toutes, que nous ne nous occuperons, dans cette étude, que des solutions réelles.

Nous allons maintenant déterminer les valeurs du paramètre ρ correspondant à chacune des deux nappes, les coordonnées du point, et l'équation du système (C).

Nous avons déjà dit que les quantités σ_2 et σ_3 pouvaient seules être nulles; or les équations (17), (11), (12) et (19) donnent immédiatement :

I. $\sigma_2 = 0$.

(23) Nappe supérieure de Δ

$$
\begin{aligned}
&(1^\circ)\quad \rho_3 = -\rho_1, \qquad \sigma_1 = \rho_2 - \rho_1, \qquad \sigma_3 = \rho_2 + \rho_1;\\
&(2^\circ)\quad S_0 = \rho_2, \qquad G_0 = \rho_1^2, \qquad H_0 = -\rho_1^2\rho_2;\\
&(3^\circ)\quad \left\{
\begin{aligned}
x_0^2 &= -\frac{(a^4-\rho_1^2)(a^2+\rho_2)}{b_1^2 c_1^2},\\
y_0^2 &= -\frac{(b^4-\rho_1^2)(b^2+\rho_2)}{c_1^2 a_1^2},\\
z_0^2 &= -\frac{(c^4-\rho_1^2)(c^2+\rho_2)}{a_1^2 b_1^2};
\end{aligned}\right.\\
&(4^\circ)\quad x_0^2+y_0^2+z_0^2 = a^2+b^2+c^2+\rho_2 = e+\rho_2;\\
&(5^\circ)\quad \left\{
\begin{aligned}
&(a^2+\rho_1)(b^2+\rho_1)(c^2+\rho_1)\\
&\quad\times\left(\frac{x_0x}{a^2+\rho_1}+\frac{y_0y}{b^2+\rho_1}+\frac{z_0z}{c^2+\rho_1}-1\right)^2\\
&-(a^2-\rho_1)(b^2-\rho_1)(c^2-\rho_1)\\
&\quad\times\left(\frac{x_0x}{a^2-\rho_1}+\frac{y_0y}{b^2-\rho_1}+\frac{z_0z}{c^2-\rho_1}-1\right)^2 = 0.
\end{aligned}\right.
\end{aligned}
$$

II. $\sigma_3 = 0$.

(24) Nappe inférieure de Δ

$$(1^\circ)\quad \rho_2 = -\rho_1,\quad \sigma_1 = \rho_3 - \rho_1,\quad \sigma_2 = \rho_3 + \rho_1;$$

$$(2^\circ)\quad S_0 = \rho_3,\quad G_0 = \rho_1^2,\quad H_0 = -\rho_1^2\rho_3;$$

$$(3^\circ)\quad \left\{ \begin{aligned} x_0^2 &= -\frac{(a^4 - \rho_1^2)(a^2 + \rho_3)}{b_1^2 c_1^2}, \\ y_0^2 &= -\frac{(b^4 - \rho_1^2)(b^2 + \rho_3)}{c_1^2 a_1^2}, \\ z_0^2 &= -\frac{(c^4 - \rho_1^2)(c^2 + \rho_3)}{a_1^2 b_1^2}; \end{aligned} \right.$$

$$(4^\circ)\quad x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \rho_3 = e + \rho_3;$$

$$(5^\circ)\quad \left\{ \begin{aligned} &(a^2 + \rho_1)(b^2 + \rho_1)(c^2 + \rho_1) \\ &\quad \times \left(\frac{x_0 x}{a^2 + \rho_1} + \frac{y_0 y}{b^2 + \rho_1} + \frac{z_0 z}{c^2 + \rho_1} - 1 \right)^2 \\ &- (a^2 - \rho_1)(b^2 - \rho_1)(c^2 - \rho_1) \\ &\quad \times \left(\frac{x_0 x}{a^2 - \rho_1} + \frac{y_0 y}{b^2 - \rho_1} + \frac{z_0 z}{c^2 - \rho_1} - 1 \right)^2. \end{aligned} \right.$$

Comme $\rho_3 < \rho_2$, on voit, par les égalités (4°), que la surface Δ se compose de deux nappes distinctes ; les relations (23) correspondent à la *nappe supérieure*, tandis que les relations (24) correspondent à la *nappe inférieure* de Δ.

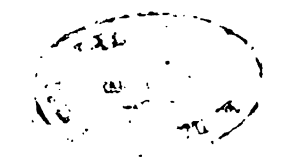
Pour la nappe supérieure, on a

$$S_0 < 0,\quad \text{et}\quad S_0^2 - G_0 = \rho_2^2 - \rho_1^2 < 0;$$

car, pour que x_0^2, y_0^2 et z_0^2 [équations (23), formules (3°)] soient positifs, il faut, eu égard aux inégalités (13) et (14), que ρ_1 soit positif et compris entre a^2 et b^2 ; et, comme la valeur absolue de ρ_2 est comprise entre c^2 et b^2, il suit de là

$$\rho_2^2 < \rho_1^2.$$

L'équation (16) nous montre alors que les deux plans du système (C) sont réels.



Pour la nappe inférieure, on a

$$S_0 < 0, \quad \text{et} \quad S_0^2 - G_0 = \rho_3^2 - \rho_1^2 > 0;$$

car, pour que x_0^2, y_0^2 et z_0^2 [équations (24), formules (3°)] soient positifs, il faut, eu égard aux inégalités (13) et (14), que ρ_1 soit positif et compris entre c^2 et b^2; et, comme la valeur absolue de ρ_3 est comprise entre a^2 et b^2, il suit de là

$$\rho_3^2 > \rho_1^2.$$

L'équation (16) nous montre alors que les deux plans du système (C) sont imaginaires.

Par conséquent :

Théorème IV. — *La surface* (Δ) *se compose de deux nappes distinctes renfermées entre la sphère* (S) *et l'ellipsoïde* (G); *ces deux nappes se raccordent en quatre points doubles coniques réels.*

(Il y a douze autres points doubles imaginaires, dont quatre à l'infini.)

Pour les différents points de la surface Δ, *le paramètre* ρ_1 *de l'ellipsoïde homofocal qui passe par ces points est positif.*

Pour la NAPPE SUPÉRIEURE, *on a*

$$b^2 < \rho_1 < a^2;$$

le cône (C) *se réduit à* DEUX PLANS RÉELS, *dont l'arête, normale à l'hyperboloïde homofocal à une nappe qui passe par le point considéré, touche la surface* Δ *en ce point.*

Pour la NAPPE INFÉRIEURE, *on a*

$$c^2 < \rho_1 < b^2;$$

le cône (C) *se réduit à* DEUX PLANS IMAGINAIRES, *dont l'arête, normale à l'hyperboloïde homofocal à deux*

nappes qui passe par le point considéré, touche la surface Δ en ce point.

12. Avant d'aller plus loin, démontrons analytiquement que l'arête du système de plans auquel se réduit le cône (C) touche la surface Δ.

Nous voyons, par les équations (23) et (24), que la droite, intersection des deux plans auxquels se réduit le cône du complexe, est définie par les deux équations

$$(25)\quad \begin{cases} \dfrac{xx_0}{a^2+\rho_1}+\dfrac{yy_0}{b^2+\rho_1}+\dfrac{zz_0}{c^2+\rho_1}-1=0, \\[2ex] \dfrac{xx_0}{a^2-\rho_1}+\dfrac{yy_0}{b^2-\rho_1}+\dfrac{zz_0}{c^2-\rho_1}-1=0, \end{cases}$$

ρ_1 étant le paramètre de l'ellipsoïde homofocal qui passe par le point (x_0, y_0, z_0).

Les coordonnées d'un point quelconque de cette droite peuvent se représenter par les équations

$$x=x_0+\frac{\lambda x_0}{A_1},\qquad y=y_0+\frac{\lambda y_0}{B_1},\qquad z=z_0+\frac{\lambda z_0}{C_1},$$

λ étant un paramètre arbitaire. Substituons ces valeurs dans les équations (25), et écrivons qu'elles sont vérifiées, quel que soit λ; il vient

$$\frac{x_0^2}{A_1(a^2+\rho_1)}+\frac{y_0^2}{B_1(b^2+\rho_1)}+\frac{z_0^2}{C_1(c^2+\rho_1)}=0,$$
$$\frac{x_0^2}{A_1(a^2-\rho_1)}+\frac{y_0^2}{B_1(b^2-\rho_1)}+\frac{z_0^2}{C_1(c^2-\rho_1)}=0,$$

après avoir remarqué que les quantités

$$\frac{x_0^2}{a^2+\rho_1}+\frac{y_0^2}{b^2+\rho_1}+\frac{z_0^2}{c^2+\rho_1}-1 \quad \text{et} \quad \frac{x_0^2}{a^2-\rho_1}+\frac{y_0^2}{b^2-\rho_1}+\frac{z_0^2}{c^2-\rho_1}-1$$

sont nulles.

Si l'on a égard aux formules (3°), équations (23), les égalités précédentes deviendront

$$\frac{a_1^2(a^2+\rho_1)(a^2+\rho_2)}{A_1}+\frac{b_1^2(b^2+\rho_1)(b^2+\rho_2)}{B_1}+\frac{c_1^2(c^2+\rho_1)(c^2+\rho_2)}{C_1}=0,$$

$$\frac{a_1^2(a^2-\rho_1)(a^2+\rho_2)}{A_1}+\frac{b_1^2(b^2-\rho_1)(b^2+\rho_2)}{B_1}+\frac{c_1^2(c^2-\rho_1)(c^2+\rho_2)}{C_1}=0;$$

or ces égalités seront évidemment vérifiées, si l'on prend

$$\frac{A_1}{a^2+\rho_2}=\frac{B_1}{b^2+\rho_2}=\frac{C_1}{c^2+\rho_2};$$

ces conditions sont suffisantes et nécessaires. Par conséquent :

Les coordonnées x, y, z d'un point quelconque de l'arête du système de deux plans auxquels se réduit le cône (C) *du complexe ayant son sommet en* (x_0, y_0, z_0) *peuvent se représenter par*

$$(26)\quad (\delta)\qquad \begin{cases} x = x_0 + \lambda \dfrac{x_0}{a^2+\rho_2}, \\ y = y_0 + \lambda \dfrac{y_0}{b^2+\rho_2}, \\ z = z_0 + \lambda \dfrac{z_0}{c^2+\rho_2}, \end{cases}$$

λ étant un paramètre arbitraire. Les formules (26) correspondent à un point situé sur la nappe supérieure de Δ; pour obtenir les formules correspondant à un point de la nappe inférieure, il suffit d'y remplacer ρ_2 par ρ_3.

Les équations (26) nous montrent encore que la droite (δ) est normale en (x_0, y_0, z_0) à la surface homofocale (ρ_2).

Ceci établi, remarquons que l'équation du plan tangent en un point (x_0, y_0, z_0) de la surface Δ est, d'après

l'équation (21) et les notations (6),

$$(27)\quad \begin{cases} xx_0(b^2c^2+AS_0+G_0)+yy_0(c^2a^2+BS_0+G_0) \\ \quad +zz_0(a^2b^2+CS_0+G_0)-(h+gS_0+eG_0-H_0)=0, \end{cases}$$

avec la condition

$$(27\ bis)\qquad S_0G_0+H_0=0.$$

Or, si l'on exprime que la droite (26) est tout entière dans ce plan, on a, en égalant à zéro le coefficient de λ et le terme indépendant de λ,

$$(1^\circ)\quad \begin{cases} x_0^2(b^2c^2+AS_0+G_0)+y_0^2(c^2a^2+BS_0+G_0) \\ \quad +z_0^2(a^2b^2+CS_0+G_0)-(h+gS_0+eG_0-H_0)=0, \end{cases}$$

$$(2^\circ)\quad \begin{cases} \dfrac{x_0^2}{a^2+\rho_2}(b^2c^2+AS_0+G_0)+\dfrac{y_0^2}{b^2+\rho_2}(c^2a^2+BS_0+G_0) \\ \quad +\dfrac{z_0^2}{c^2+\rho_2}(a^2b^2+CS_0+G_0)=0. \end{cases}$$

D'après les notations (6), l'égalité (1°) devient

$$H_0+h+S_0(G_0+g)+G_0(S_0+e)-(h+gS_0+eG_0-H_0)=0,$$

ce qui est visiblement une identité.

Quant à l'égalité (2°), si l'on y introduit les valeurs (3°), équations (23), elle devient

$$a_1^2(a^4-\rho_1^2)(b^2c^2+AS_0+G_0)+b_1^2(b^4-\rho_1^2)(c^2a^2+BS_0+G_0) \\ +c_1^2(c^4-\rho_1^2)(a^2b^2+CS_0+G_0)=0;$$

ou encore, puisque $S_0=\rho_2$ et $G_0=\rho_1^2$,

$$a_1^2(a^4-\rho_1^2)(b^2c^2+A\rho_2+\rho_1^2)+b_1^2(b^4-\rho_1^2)(c^2a^2+B\rho_2+\rho_1^2) \\ +c_1^2(c^4-\rho_1^2)(a^2b^2+C\rho_2+\rho_1^2)=0;$$

on voit alors immédiatement que le coefficient de ρ_2 et ceux des diverses puissances de ρ_1^2 sont respectivement nuls. La proposition énoncée est donc démontrée.

13. Nous allons donner encore une autre démonstra-

tion de la même proposition; elle nous fournira l'occasion d'écrire plusieurs relations qui nous seront fort utiles dans la suite.

Si l'on se reporte aux notations (5) du n° 5, on constate immédiatement les égalités suivantes :

$$
(28)\quad \left\{\begin{aligned}
&a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 0,\\
&a^2 a_1^2 + b^2 b_1^2 + c^2 c_1^2 = 0,\\
&A a_1^2 + B b_1^2 + C c_1^2 = 0,\\
&A a^4 a_1^2 + B b^4 b_1^2 + C c^4 c_1^2 = 0;\\
&a_1^2 A^2 + b_1^2 B^2 + c_1^2 C^2 = -a_1^2 b_1^2 c_1^2,\\
&a_1^2 a^4 + b_1^2 b^4 + c_1^2 c^4 = -a_1^2 b_1^2 c_1^2,\\
&a_1^2 b^2 c^2 + b_1^2 c^2 a^2 + c_1^2 a^2 b^2 = -a_1^2 b_1^2 c_1^2,\\
&a_1^2 BC + b_1^2 CA + c_1^2 AB = -a_1^2 b_1^2 c_1^2,\\
&a^2 a_1^2 A + b^2 b_1^2 B + c^2 c_1^2 C = +a_1^2 b_1^2 c_1^2;\\
&a^2 a_1^2 BC + b^2 b_1^2 CA + c^2 c_1^2 AB = -e . a_1^2 b_1^2 c_1^2,\\
&a_1^2 a^6 + b_1^2 b^6 + c_1^2 c^6 = -e . a_1^2 b_1^2 c_1^2,\\
&a_1^2 a^2 A^2 + b_1^2 b^2 B^2 + c_1^2 c^2 C^2 = +e . a_1^2 b_1^2 c_1^2,\\
&a_1^2 b^4 c^4 + b_1^2 c^4 a^4 + a_1^2 a^4 b^4 = -g . a_1^2 b_1^2 c_1^2,\\
&a_1^2 a^4 A^2 + b_1^2 b^4 B^2 + c_1^2 c^4 C^2 = +g . a_1^2 b_1^2 c_1^2,\\
&a_1^2 b^2 c^2 BC + b_1^2 c^2 a^2 CA + c_1^2 a^2 b^2 AB = -g . a_1^2 b_1^2 c_1^2.
\end{aligned}\right.
$$

Posons, en outre,

$$
(29)\quad \left\{\begin{aligned}
&E = \rho_1^2\rho^2 + e\rho_1^2 + g\rho_2 + h,\\
&F = \rho_1^4 + e\rho_1^2\rho_2 + g\rho_1^2 + h\rho_2;
\end{aligned}\right.
$$

on constate de suite que

$$
(30)\quad \left\{\begin{aligned}
&(a^4 - \rho_1^2)(b^2c^2 + A\rho_2 + \rho_1^2) = a^2E - F,\\
&(b^4 - \rho_1^2)(c^2a^2 + B\rho_2 + \rho_1^2) = b^2E - F,\\
&(c^4 - \rho_1^2)(a^2b^2 + C\rho_2 + \rho_1^2) = c^2E - F;
\end{aligned}\right.
$$

$$
(30\ bis)\quad \left\{\begin{aligned}
&(a^2 + \rho_2)(b^2c^2 + A\rho_2 + \rho_1^2) = E + A(\rho_2^2 - \rho_1^2),\\
&(b^2 + \rho_2)(c^2a^2 + B\rho_2 + \rho_1^2) = E + B(\rho_2^2 - \rho_1^2),\\
&(c^2 + \rho_2)(a^2b^2 + C\rho_2 + \rho_1^2) = E + C(\rho_2^2 - \rho_1^2);
\end{aligned}\right.
$$

de là on conclut

$$(31)\quad\begin{cases}(a^4-\rho_1^2)(b^2c^2+A\rho_2+\rho_2^2)=a^2E-F+(a^4-\rho_1^2)(\rho_2^2-\rho_1^2),\\(b^4-\rho_1^2)(c^2a^2+B\rho_2+\rho_2^2)=b^2E-F+(b^4-\rho_1^2)(\rho_2^2-\rho_1^2),\\(c^4-\rho_1^2)(a^2b^2+C\rho_2+\rho_2^2)=c^2E-F+(c^4-\rho_1^2)(\rho_2^2-\rho_1^2).\end{cases}$$

Ceci établi, substituons les valeurs (26) dans l'équation

$$SG+H=0$$

de la surface Δ; dans ce but, calculons d'abord S, G, H.

On a, en substituant les valeurs (26) dans les expressions (6), n° 5, de S, G, H,

$$S=S_0+2\lambda\left(\frac{x_0^2}{a^2+\rho_2}+\frac{y_0^2}{b^2+\rho_2}+\frac{z_0^2}{c^2+\rho_2}\right)$$
$$+\lambda^2\left[\frac{x_0^2}{(a^2+\rho_2)^2}+\frac{y_0^2}{(b^2+\rho_2)^2}+\frac{z_0^2}{(c^2+\rho_2)^2}\right],$$
$$G=G_0+2\lambda\left(\frac{Ax_0^2}{a^2+\rho_2}+\frac{By_0^2}{b^2+\rho_2}+\frac{Cz_0^2}{c^2+\rho_2}\right)$$
$$+\lambda^2\left[\frac{Ax_0^2}{(a^2+\rho_2)^2}+\frac{By_0^2}{(b^2+\rho_2)^2}+\frac{Cz_0^2}{(c^2+\rho_2)^2}\right],$$
$$H=H_0+2\lambda\left(\frac{b^2c^2x_0^2}{a^2+\rho_2}+\frac{c^2a^2y_0^2}{b^2+\rho_2}+\frac{a^2b^2z_0^2}{c^2+\rho_2}\right)$$
$$+\lambda^2\left[\frac{b^2c^2x_0^2}{(a^2+\rho_2)^2}+\frac{c^2a^2y_0^2}{(b^2+\rho_2)^2}+\frac{a^2b^2z_0^2}{(c^2+\rho_2)^2}\right].$$

Si maintenant on introduit les valeurs (2°) et (3°), équations (23), n° 11, et qu'on ait égard aux relations (28) et (31), on obtient très-facilement

$$(32)\quad\begin{cases}S=\rho_2+2\lambda\\\qquad+\dfrac{\lambda^2}{(a^2+\rho_2)(b^2+\rho_2)(c^2+\rho_2)}(\rho_2^2-\rho_1^2),\\G=\rho_1^2+0.\lambda\\\qquad-\dfrac{\lambda^2}{(a^2+\rho_2)(b^2+\rho_2)(c^2+\rho_2)}E,\\H=-\rho_1^2\rho_2-2\rho_1^2\lambda\\\qquad-\dfrac{\lambda^2}{(a^2+\rho_2)(b^2+\rho_2)(c^2+\rho_2)}[F+\rho_1^2(\rho_2^2-\rho_1^2)].\end{cases}$$

Si l'on substitue ces dernières dans l'équation $SG + H = 0$ de la surface Δ, on est conduit au résultat très-simple

$$(33)\quad \left\{ \begin{aligned} &\lambda^2[(\rho_1^2 + \rho_2^2)(\rho_1^2 + g) + 2(e\rho_1^2 + h)\rho_2] \\ &\quad + [\rho_2(\rho_1^2 + g) + (e\rho_1^2 + h)] \\ &\quad \times \left[2 + \frac{\lambda(\rho_2^2 - \rho_1^2)}{(a^2 + \rho_2)(b^2 + \rho_2)(c^2 + \rho_2)}\right]\lambda^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

On aura l'équation analogue relative à la nappe inférieure en remplaçant ρ_2 par ρ_3.

On voit donc que l'arête des deux plans auxquels se réduit le cône (C) du complexe touche la surface Δ au point (x_0, y_0, z_0), et qu'elle est une tangente ordinaire, c'est-à-dire qu'elle n'y rencontre la surface qu'en deux points coïncidents.

On peut se demander si le coefficient de λ^2 peut être nul, c'est-à-dire si la droite (26) peut être une *tangente inflexionnelle* de Δ.

En égalant à zéro le coefficient de λ^2 dans l'équation (33), on trouve

$$(\rho_1^2 + g)\rho_2^2 + 2(e\rho_1^2 + h)\rho_2 + \rho_1^2(\rho_1^2 + g) = 0,$$

ou encore

$$[\rho_2(\rho_1^2 + g) + e\rho_1^2 + h]^2 + \rho_1^2(\rho_1^2 + g)^2 - (e\rho_1^2 + h)^2 = 0,$$

ce qu'on peut écrire enfin

$$(1^\circ)\quad (\rho_2\rho_1^2 + e\rho_1^2 + g\rho_2 + h)^2 - (a^4 - o^2)\ b^4 - \rho_1^2)(c^4 - \rho_1^2) = 0.$$

Or, pour la surface Δ, ρ_1 est positif et compris entre a^2 et b^2 pour la nappe supérieure, entre b^2 et c^2 pour la nappe inférieure (théorème IV, n° 12). On voit alors que l'équation n'admettra pas de solution réelle en ρ_2 pour la nappe inférieure, mais elle admettra une solution réelle en ρ_2 pour la nappe supérieure. Seulement il est facile de constater que la plus grande des valeurs

absolues de ρ_2 est supérieure à b^2, et que la plus petite de ses valeurs absolues est inférieure à c^2. Il n'y a donc pas, en définitive, de points réels pour lesquels l'arête d'un système du complexe serait une tangente inflexionnelle. Ce résultat pourrait d'ailleurs se conclure de la forme supposée connue de la surface Δ.

Remarque. — Les droites (δ) [équations (26), n° 12], qui sont les arêtes des systèmes du complexe, forment une *congruence* que j'étudierai dans un autre Mémoire. Pour l'instant, je me contenterai d'énoncer la propriété suivante :

Dans un plan, arbitrairement donné, il y a quatre droites (δ) ; *par un point, arbitrairement donné, passent quatre droites* (δ).

La démonstration analytique en sera donnée dans le § IV.

14. Nous préciserons encore mieux la position des droites du complexe en énonçant la proposition suivante :

Théorème V. — *Les droites réelles du complexe passent toutes entre les deux nappes de la surface* Δ, *sans jamais pénétrer dans l'intérieur de la nappe inférieure; les positions limites de ces droites sont des tangentes à la surface* Δ.

En effet, une droite réelle (D) ne peut pas pénétrer dans la nappe inférieure de Δ; car, si cela pouvait arriver, elle rencontrerait cette nappe en un certain point I; pour ce point I, le cône (C) du complexe se réduit à deux plans imaginaires dont l'arête touche Δ en I; mais la droite (D), qui passe par le point I, doit alors appartenir à ce système de deux plans, et, comme elle est réelle, elle ne peut que coïncider avec leur arête; l'hypothèse faite est donc inadmissible.

Supposons maintenant la droite (D) réelle et extérieure à la surface Δ; menons alors un plan par cette droite et le centre O de l'ellipsoïde; ce plan coupera la nappe extérieure de Δ suivant une certaine courbe δ'; les cônes du complexe, dont les sommets sont sur δ', se décomposent en des plans réels, dont les intersections par le plan considéré seront autant de droites réelles du complexe situées dans ce plan. D'un autre côté, nous verrons, dans le paragraphe suivant, que les droites du complexe situées dans un plan enveloppent une conique dont le centre est le pied de la perpendiculaire abaissée du centre O de l'ellipsoïde sur le plan. Dans le cas actuel, le centre de la conique est le point O lui-même; la conique est réelle, puisqu'il y a des droites réelles du complexe dans le plan en question; la conique ne peut pas être une hyperbole, car on pourrait alors lui mener des tangentes des points situés dans le voisinage du point O, et il y aurait des droites réelles du complexe pénétrant dans l'intérieur de la deuxième nappe de Δ, ce qui est contraire à la première partie de la proposition. Cette conique, qui est une ellipse, doit toucher la droite (D); or, si cette droite (D) est extérieure à la surface Δ et, par suite, à la courbe δ', l'ellipse interceptera sur cette courbe δ' une certaine portion d'arc; mais les divers points de cet arc donnent lieu à des droites réelles, issues de ces points, qui devraient toucher l'ellipse, ce qui est impossible. Il y a donc contradiction tant que la droite (D) est extérieure à la courbe δ'; par conséquent, il ne peut pas exister de droite réelle extérieure à la surface (Δ).

M. Darboux, en appelant mon attention sur le lieu géométrique énoncé au commencement, m'avait signalé cette propriété, sans m'en communiquer la démonstration.

(*La suite prochainement.*)

MÉMOIRE SUR L'EMPLOI DES IMAGINAIRES DANS LA GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE

(suite, voir même tome, p. 14);

Par M. LAGUERRE.

---

7. La façon dont j'ai défini au n° 5 les surfaces anallagmatiques, au moyen de leurs sections circulaires, s'étend d'elle-même au cas où ces surfaces ont un plan de symétrie; dans ce cas, l'une des sphères principales se réduit à un plan, ainsi que la surface du second degré correspondante, et les définitions que j'ai données précédemment, la définition comme enveloppes de sphères et la définition par points, deviennent illusoires. Mais, avant d'aborder ce sujet, il est nécessaire d'exposer quelques considérations très-simples sur la transformation des figures par rayons vecteurs réciproques.

Étant donnés un point quelconque a, réel ou imaginaire, et le cône isotrope ayant ce point pour sommet, il est clair que, par une transformation quelconque par rayons vecteurs réciproques, ce cône isotrope se transforme en un autre cône isotrope ayant pour sommet le point qui correspond au point a. Si donc on a deux points quelconques a et b, au cercle (a, b) correspondra après la transformation le cercle (α, β), α et β désignant les points qui correspondent aux points a et b.

Imaginons une surface anallagmatique comme le lieu des différents cercles (a, a'), (b, b'), (c, c'),... déterminés par les points où les génératrices d'une surface du second ordre aa', bb', cc',... s'appuient sur un biquadratique sphérique F, et effectuons sur cette figure une transformation par rayons vecteurs réciproques. La

courbe F se transformera en une autre biquadratique sphérique Φ ; sur cette courbe Φ, aux points a, a', b, b',... correspondront des points α, α', β, β',..., et la surface transformée de la surface donnée sera le lieu des cercles (α, α'), (β, β'),.... D'où l'on peut, en passant, tirer cette conséquence, que les droites $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$,... sont, comme les droites aa', bb', cc',..., les génératrices d'une même surface du second ordre.

Considérons maintenant une biquadratique sphérique F et une surface du second degré quelconque A, passant par cette courbe. Toutes les génératrices d'un même système de A, telles que aa', peuvent être obtenues en choisissant arbitrairement une génératrice ss' de l'autre système et en menant des plans par cette dernière génératrice. Ces divers plans couperont la sphère suivant des cercles passant par les deux points fixes s et s' et chacun de ces cercles coupera la courbe F en deux points variables a et a' situés sur une même génératrice de A; le lieu des cercles (a, a') est l'anallagmatique définie par la surface A et la focale F ; on peut donc énoncer la proposition suivante :

Si, par deux points fixes s et s', d'une biquadratique sphérique F, on mène un cercle variable rencontrant la courbe F aux deux points a et a', le lieu des cercles (a, a') est une surface anallagmatique ayant F pour focale.

Transformons maintenant la figure précédente en prenant le pôle de transformation sur la sphère qui contient la courbe F; la surface anallagmatique donnée se transforme en une surface anallagmatique ayant pour plan de symétrie le plan qui correspond à la sphère. La focale F se transforme en une anallagmatique plane Φ sur laquelle se trouvent les deux points σ et σ' correspondant aux points s et s' ; et l'on obtient la proposition suivante :

Si, par deux points fixes σ et σ' d'une anallagmatique plane Φ, on mène un cercle variable coupant la courbe Φ aux points α et α', le lieu des cercles (α, α') est une surface anallagmatique ayant pour plan de symétrie le plan de la focale Φ.

Le second système de sections circulaires appartenant à la focale Φ s'obtiendrait facilement : en effet, étant mené par σ et par σ' un cercle quelconque coupant la focale en deux points α et α'; si, par ces deux points, on mène un cercle variable rencontrant Φ aux points ρ et ρ', les différents cercles tels que (ρ, ρ') constitueront ce second système de sections circulaires.

Les plans des différents cercles tels que (α, α') ont pour traces, sur le plan de la focale Φ, les perpendiculaires élevées sur les segments $\alpha\alpha'$ en leurs points milieux. Toutes ces perpendiculaires, il est facile de le voir, enveloppent une conique ayant pour foyers les foyers singuliers de l'anallagmatique Φ (*). D'où l'on peut conclure que, quand une série de surfaces anallagmatiques a pour focale commune une anallagmatique plane, les traces des cylindres enveloppés par les plans des cercles de ces surfaces appartenant à cette focale, sur le plan de symétrie, sont des coniques homofocales ayant pour foyers communs les foyers singuliers de la focale.

8. La proposition précédente n'est, du reste, qu'un cas particulier d'un théorème relatif aux anallagmatiques en général et que l'on peut établir très-simplement.

Considérons une surface anallagmatique quelconque R, ayant pour focale une biquadratique sphérique F. Les

---

(*) Voir, dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (janvier 1863), ma Note intitulée : *Théorèmes généraux sur les courbes*, etc.

plans des divers cercles de la surface, appartenant à cette focale, enveloppent un cône ayant pour sommet le centre de la sphère S, sur laquelle est située la focale ; et ces plans sont perpendiculaires aux diverses génératrices de la surface du second degré A passant par la focale qui détermine la surface R. Pour trouver les droites focales de ce cône, je rappellerai que ces droites sont les intersections des divers plans isotropes qu'on peut lui mener tangentiellement. Or, les perpendiculaires à un plan isotrope touchant l'*ombilicale* en un point donné ω sont les diverses droites isotropes passant par ce point correspondant aux plans isotropes tangents au cône ; donc des génératrices isotropes de A, et réciproquement. Une génératrice isotrope de A doit percer le plan de l'infini en un point de l'ombilicale, et aussi en un point de la trace de la surface A sur le même plan. Soit Ω l'ombilicale et *a*, *b*, *c*, *d* les quatre points où cette courbe rencontre la focale F ; la surface A passant par cette focale, sa courbe d'intersection avec le plan de l'infini est une conique passant par les points *a*, *b*, *c* et *d*, et il est clair que les génératrices isotropes de A sont les huit génératrices passant par ces quatre points. Les traces, sur le plan de l'infini, des quatre plans qui leur sont perpendiculaires et qui passent par le centre de la sphère, sont les quatre droites menées tangentiellement à l'ombilicale par les quatre points *a*, *b*, *c* et *d* ; les focales du cône sont donc les six droites conjuguées deux à deux qui joignent le centre de la sphère aux divers points d'intersection *p*, *q*, *r*, *s*, *t*, *u* des quatre tangentes. On voit que ces focales sont complétement déterminées par la focale F et ne dépendent en aucune façon de la surface particulière A. On peut donc énoncer cette proposition :

Si l'on considère une série de surfaces anallagmatiques homofocales, et si, pour chacune de ces surfaces, on

construit le cône enveloppe des cercles appartenant à l'une de ses focales, tous les cônes ainsi obtenus sont homofocaux.

J'ajouterai que les focales de ces cônes sont les focales singulières des cônes ayant pour base la focale de la surface anallagmatique considérée, et, pour sommet, le centre de la sphère sur laquelle cette courbe est située. Mais, pour abréger, je laisse de côté la démonstration de ce point de détail (*).

9. Je reviens maintenant au mode de description des surfaces anallagmatiques à plan de symétrie, donné au n° 7, pour montrer comment il s'applique aux surfaces du second ordre. Ces dernières s'obtiennent lorsque la focale, qui, en général, est une courbe anallagmatique plane, se réduit à une conique. Soit donc une conique quelconque C réelle (ou du moins ayant une équation réelle) et a, a' deux points fixes pris sur cette conique. Par ces deux points, menons un cercle quelconque coupant la conique en α et en α'; d'après ce qui a été dit ci-dessus, le lieu des cercles tels que (α, α') est une surface du second ordre ayant pour focale C. D'après un théorème élémentaire bien connu, toutes les droites telles que $\alpha\alpha'$ ont une direction fixe. On peut donc énoncer la proposition suivante qu'il serait très-simple, d'ailleurs, d'établir directement :

Si l'on mène, dans le plan d'une conique, une série de droites parallèles à une direction fixe D, *en désignant par a et a' les deux points d'intersection de la conique avec une quelconque de ces droites, le lieu des cercles*

(*) *Voir*, dans le *Bulletin de la Société Philomathique*, le n° 4 de ma Communication du 23 mars 1867 : *Sur les courbes résultant de l'intersection d'une sphère et d'une surface du second degré.*

tels que (a, a') *est une surface du second ordre ayant pour focale la conique donnée.*

Supposons que C soit une ellipse; imaginons toutes les droites réelles parallèles à une droite fixe D et extérieures à l'ellipse; chacune de ces droites rencontre l'ellipse en deux points imaginairement conjugués, représentés par un cercle réel; tous les cercles réels ainsi obtenus, quand la droite se déplace, constituent l'un des systèmes de sections circulaires d'un hyperboloïde à deux nappes ayant pour focale l'ellipse donnée. Si le système des droites considéré était parallèle à une droite D' faisant avec le grand axe de l'ellipse un angle supplémentaire de l'angle que fait D avec ce même axe, les cercles représentatifs des points d'intersection de l'ellipse avec ces diverses droites constitueraient le second système de sections circulaires de l'hyperboloïde mentionné ci-dessus.

Si nous imaginons l'infinité d'hyperboloïdes à deux nappes qui ont pour focale l'ellipse C, leurs diverses sections circulaires représenteront tous les points imaginaires situés sur cette ellipse. D'où l'on peut conclure le théorème suivant :

Pour qu'un cercle réel, donné dans l'espace, représente un couple de points imaginairement conjugués, situés sur une ellipse donnée, il faut et il suffit que ce cercle soit une section circulaire d'un hyperboloïde à deux nappes ayant cette ellipse pour focale.

De même :

Pour qu'un cercle réel, donné dans l'espace, représente un couple de points imaginairement conjugués, situés sur une hyperbole donnée, il faut et il suffit que ce cercle soit une section circulaire d'un ellipsoïde ayant cette hyperbole pour focale.

10. Il existe, relativement au système de deux cercles situés sur une même sphère une propriété très-simple, qui a de fréquentes applications dans la géométrie de la sphère et dans la théorie des surfaces anallagmatiques. Je vais l'exposer brièvement, en en supprimant la démonstration, d'ailleurs très-facile à suppléer.

Soient deux cercles C et D situés sur une même sphère, et par conséquent se coupant en deux points. Le cercle C représente deux points de l'espace c et c', qui sont réciproques par rapport à la sphère et que l'on pourrait désigner par la notation (C); le cercle D représente de même deux points réciproques d et d'. Les quatre points c, c', d et d' sont d'ailleurs dans un même plan passant par le centre de la sphère. Cela posé, par les deux cercles donnés, on peut faire passer deux cônes, et les sommets de ces cônes sont les deux points de rencontre respectifs des droites cd et $c'd'$ et des droites cd' et $c'd$.

Supposons les cercles C et D réels; supposons-les, en outre, décrits dans un sens déterminé, en sorte que chacun d'eux représente un point imaginaire et un seul; le point c, par exemple, étant représenté par le cercle C et le point d par le cercle D. La droite imaginaire cd est imaginairement conjuguée à la droite $c'd'$; ces deux droites étant dans le même plan se coupent en un point réel, que l'on peut définir comme étant le point réel situé sur cd; et, d'après ce que j'ai dit plus haut, ce point est le sommet d'un cône passant par C et D. Mais ici l'on peut ajouter qu'un spectateur, dont l'œil serait placé au sommet du cône, verrait les cercles C et D décrits en sens inverse; en sorte que si le mobile qui est censé décrire l'un d'eux lui paraît se mouvoir dans le sens des aiguilles d'une montre, le mobile qui est supposé décrire l'autre lui paraîtra se mouvoir dans l'autre sens.

Cette dernière remarque est souvent utile pour fixer

le sens que l'on doit affecter à un cercle représentant un point imaginaire.

Considérons maintenant une surface anallagmatique R, définie par la surface du second degré A et la focale F située sur cette surface, et les deux systèmes de génératrices circulaires de l'anallagmatique appartenant à cette focale. Soit C un cercle fixe de l'un de ces systèmes, représentant deux points c et c' de la focale; soit D un cercle quelconque de l'autre système, représentant deux points d et d' de la focale. Les cercles C et D sont situés sur une même sphère, et l'on sait d'ailleurs que les droites cc' et dd' sont deux génératrices, de systèmes différents, de la surface A. D'après ce qui a été dit plus haut, les sommets des cônes qui passent par les cercles C et D sont les deux points r et s, où se coupent respectivement les droites cd' et $c'd$ d'une part, les droites cd et $c'd'$ d'autre part. Le lieu décrit par les sommets de ces cônes, lorsque, le cercle C étant fixe, le cercle D se déplace sur la surface R, est donc l'intersection des deux cônes ayant pour base la focale F et pour sommets les points c et c'. Ces cônes sont du troisième degré; leur intersection, qui est du neuvième degré, se compose d'abord de la génératrice cc', de la focale et du lieu cherché; ce dernier est donc du quatrième ordre.

D'où l'on peut conclure la proposition suivante :

Étant pris, sur une surface anallagmatique, un cercle quelconque appartenant à une focale F *de cette surface, par ce cercle et par un cercle quelconque* D *du second système circulaire appartenant à cette focale, on peut faire passer deux cônes; le lieu décrit par le sommet de ces cônes, lorsque, le cercle* C *étant fixe, le cercle* D *se déplace sur la surface, est une courbe du quatrième ordre faisant partie de l'intersection des deux cônes, qui ont pour base commune la focale* F *et*

pour sommets les deux points de cette focale que représente le cercle C.

11. Dans ce qui précède, j'ai montré comment on peut déterminer les conditions géométriques auxquelles un cercle doit satisfaire pour représenter un couple de points situés sur une biquadratique sphérique donnée, en groupant deux à deux les divers points de cette courbe de façon qu'à l'ensemble de tous les couples de points corresponde l'ensemble des génératrices circulaires d'une surface anallagmatique. Chaque mode de groupement est défini par une surface du second ordre, de telle sorte que deux points quelconques de la courbe, qui se correspondent, se trouvent sur une même génératrice de la surface.

Soit, en général, une courbe gauche géométrique quelconque G; imaginons une surface réglée V, telle que chacune de ses génératrices s'appuie en deux points sur cette courbe. Soient aa', bb', cc',... les génératrices consécutives de cette surface; les cercles (a, a'), (b, b'), (c, c'),... engendreront une autre surface, que je dirai dérivée de la courbe G. D'une même courbe donnée, on peut ainsi déduire une infinité de surfaces à génératrices circulaires, et chacune de ces surfaces dérivées correspond à un certain mode de groupement des points de la courbe, défini par la surface réglée V.

Lorsque la courbe G est plane, les droites, telles que aa', bb',..., qui joignent les points conjugués de cette courbe, ne forment plus une surface gauche, mais enveloppent une courbe plane, qui peut aussi servir à définir le groupement des points. Dans ce cas, et lorsque la courbe G est d'un degré supérieur à deux, chacune des tangentes à l'enveloppe plane rencontrant G en plus de deux points, il est nécessaire de fixer ceux des points de rencontre que l'on doit grouper ensemble. Pour éviter

cette difficulté, il est alors généralement préférable de définir chaque couple de points par d'autres considérations ne donnant lieu à aucune ambiguïté, comme je l'ai fait au n° 7, en traitant des surfaces anallagmatiques à plan de symétrie.

On peut toujours, d'ailleurs, sauf dans le cas très-particulier où la courbe plane G est un cercle, effectuer une transformation par rayons vecteurs réciproques, de façon que cette courbe devienne une courbe gauche sphérique (*).

12. D'une courbe gauche donnée, on peut, comme je l'ai montré, déduire une infinité de surfaces à génératrices circulaires, dérivées de cette courbe.

Réciproquement, étant donnée une surface quelconque à génératrices circulaires, on peut toujours la considérer comme une surface dérivée d'une certaine courbe gauche G. En désignant par C, C′, C″,... les diverses génératrices circulaires de la surface, cette courbe est le lieu des points (C), (C′), (C″),...; et la surface réglée V, qui détermine le mode de groupement des points de la courbe, est le lieu des axes des différents cercles.

(*La suite prochainement.*)

(*) *Voir*, comme application de ces considérations, mon *Étude géométrique sur la cyclide*. Journal *l'Institut* et *Bulletin de la Société Philomathique*, novembre 1871.

SUR LA MÉTHODE DE BRISSON

pour intégrer les équations différentielles à coefficients constants, à propos d'une question de licence;

PAR M. P. MANSION,
Professeur à l'Université de Gand.

Trouver l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 2\frac{d^2y}{dx^2} + y = Ae^x + Be^{-x} + C\sin x + D\cos x.$$

1. Cette question a été résolue par MM. Graindorge et Moret-Blanc (*Nouvelles Annales*, p. 111 et 321; 1871). Le premier a employé *la méthode de la variation des constantes arbitraires*, ce qui le conduit à des calculs assez compliqués. Le second devine la forme d'une solution particulière, ce qui lui permet d'arriver à la solution d'une manière très-expéditive.

M. Michaëlis a montré (*Mémoires de la Société des Sciences du Luxembourg*, t. VIII) qu'il existait une règle générale pour découvrir une solution particulière semblable dans tous les cas analogues; mais son travail, enfoui dans un recueil peu répandu, ne semble pas avoir été connu des auteurs des derniers traités de calcul intégral, de M. Serret, par exemple.

Il existe une méthode d'intégration des équations linéaires à coefficients constants, qui conduit, d'une manière plus simple que celle de M. Michaëlis, à la même règle générale. Cette méthode est due au géomètre français Brisson. Cauchy en a signalé la fécondité (*Exercices de

Mathématiques, t. II, p. 175), et elle est très-connue en Angleterre, où elle a été *réinventée* par Boole (*A Treatise on differential equations*, 2e édition, p. 391; 1865). Dans une petite Note, imprimée dans les Mémoires in-8° de Bruxelles, t. XXII, nous avons démontré, au moyen de cette méthode, la règle générale dont nous parlions tantôt; autrement dit, nous avons donné la forme de l'intégrale générale des équations linéaires à coefficients constants, dont le second membre est une somme d'expressions de la forme

$$e^{mx}(A + Bx + Cx^2 + \ldots),$$

m étant réel ou imaginaire. Cette méthode étant très-peu connue, nous allons l'exposer sur le cas particulier dont MM. Graindorge et Moret-Blanc ont donné la solution; comme elle est extrêmement simple, chacun rétablira aisément la théorie complète.

2. *Notations*. Au lieu de

$$\frac{dy}{dx}, \quad \frac{dy}{dx} + ay, \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by,$$

nous écrirons, quand a et b sont des constantes,

$$Dy, \quad (D + a)y, \quad D^2y, \quad (D^2 + aD + b)y.$$

Les expressions

$$D + a, \quad D^2 + aD + b$$

seront appelées *facteurs symboliques;* une *multiplication symbolique* sera l'opération que l'on doit faire sur y, au moyen des facteurs symboliques

$$D + a, \quad D^2 + aD + b,$$

pour en déduire

$$Dy + ay, \quad D^2y + aDy + by.$$

Il est clair que, par convention, *la multiplication symbolique se fait absolument comme une multiplication ordinaire.* On a aussi, k étant constant,

$$(\mathrm{D}+a)kz = \mathrm{D}kz + akz = k(\mathrm{D}+a)z.$$

Donc *on peut intervertir ou changer de place un facteur constant k et un facteur symbolique* D + *a*. Puis

$$(\mathrm{D}+a)(y_1+y_2-y_3)=(\mathrm{D}+a)y_1+(\mathrm{D}+a)y_2-(\mathrm{D}+a)y_3.$$

La multiplication d'une somme par un facteur symbolique se fait comme une multiplication ordinaire.

3. D'après ce qui précède, on comprend la signification des expressions suivantes

$$(\mathrm{D}-a)(\mathrm{D}-b)y,\quad (\mathrm{D}-a)(\mathrm{D}-b)(\mathrm{D}-c)y,\ldots.$$

On indique simplement par là que l'on doit effectuer successivement plusieurs multiplications symboliques. Il est clair que *ces multiplications se font encore comme les multiplications ordinaires*, puisqu'il en est ainsi de chacune en particulier. Ainsi, on aura

$$(\mathrm{D}-a)(\mathrm{D}-b)y=[\mathrm{D}^2-(a+b)\mathrm{D}+ab]y.$$

Réciproquement, une expression

$$(\mathrm{D}^2+\mathrm{AD}+\mathrm{B})y$$

pourra se décomposer, comme en algèbre, en facteurs,

$$(\mathrm{D}-a)(\mathrm{D}-b)y,$$

si a et b sont les racines de l'équation

$$\mathrm{D}^2+\mathrm{AD}+\mathrm{B}=0,$$

où D est l'inconnue, A et B étant donc tels que

$$A = -a - b, \quad B = ab.$$

4. Cela posé, l'équation donnée en tête de cet article se met sous la forme

$$(D^4 - 2D^2 + 1)y = X,$$

X désignant le second membre; ou encore

$$(D + 1)(D + 1)(D - 1)(D - 1)y = X.$$

Posons

$$(1) \qquad (D - 1)y = y_1,$$

$$(2) \qquad (D - 1)y_1 = y_2,$$

$$(3) \qquad (D + 1)y_2 = y_3;$$

elle deviendra successivement

$$(D + 1)(D + 1)(D - 1)y_1 = X,$$

$$(D + 1)(D + 1)\, y_2 = X,$$

$$(4) \qquad (D + 1)y_3 = X.$$

Les équations (4), (3), (2), (1), *toutes linéaires et du premier ordre,* donnent sans peine successivement y_3, y_2, y_1, y.

Toute équation linéaire à coefficients constants peut ainsi se ramener à un système d'équations simultanées du premier ordre.

Brisson a inventé une seconde méthode d'intégration encore plus ingénieuse que la précédente. Elle se trouve aussi exposée dans Cauchy et dans Boole.

Gand, 2 janvier 1872.

MÉMOIRE SUR LA THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DES COURBES DU TROISIÈME ORDRE

(suite et fin, voir même tome, p. 66);

PAR M. KOEHLER.

XI. *Courbe hessienne.* — Imaginons le faisceau des polaires coniques de tous les points d'une droite; aux points a, a', a'',... correspondent sans ambiguïté des coniques C, C', C'',..., et réciproquement. La série a, a', a'',... et la série C, C', C'',... sont homographiques, ou, en d'autres termes, le rapport anharmonique de quatre points d'une droite est égal à celui de leurs quatre polaires; on aura donc facilement les trois points correspondants aux trois coniques formées par les couples de côtés opposés et par les diagonales du quadrilatère, base du faisceau (il suffira pour cela de déterminer les polaires de trois points quelconques de la droite). On conclut de là que le lieu des points dont les polaires coniques se réduisent à des systèmes de deux droites est une courbe du troisième ordre, puisque sur une droite quelconque il y a toujours trois points du lieu. Cette courbe est la hessienne de la cubique donnée; elle la coupe en ses points d'inflexion et au point double, s'il existe.

Les points d'inflexion d'une cubique sont aussi des points d'inflexion de sa hessienne. — Menons la corde de contact d'un point d'inflexion I, et soient a, b, c les points où cette corde rencontre la courbe. Si un point P parcourt abc, ses conjugués relatifs à a, b, c forment une série de segments en involution; soient π, π' les positions

de P qui correspondent aux points doubles. Il est évident que les droites $I\pi$, $I\pi'$ sont des tangentes à la hessienne. Si l'on cherche, en effet, les deux points autres que I situés sur une de ces droites, on trouvera deux points confondus en un seul, parce que les cordes communes des polaires de tous les points de $I\pi$ ou $I\pi'$ ne constituent plus que deux systèmes distincts, savoir : la droite It, tangente d'inflexion, et la corde abc d'une part, de l'autre les deux droites issues de p (ou de p'), et formant deux groupes de cordes communes confondus en un seul.

La tangente d'inflexion It est aussi une tangente à la hessienne, car les polaires de tous les points de cette droite la touchent en I et passent par deux points situés sur abc; on a donc encore deux systèmes de cordes communes coïncidents, et par suite deux points de la hessienne confondus en un seul. Considérons enfin la droite It', axe des moyennes harmoniques de It par rapport à Ia, Ib, Ic; on voit facilement que les polaires de tous les points de It' sont tangentes en t à la droite It (*); elles ont un autre point commun sur abc, et ne peuvent en avoir en dehors de cette droite, puisque les pôles harmoniques de toute droite passant en I appartiennent à la polaire (It, abc) de ce point. Elles ont donc un contact du second ordre en t, suivant It, et n'ont qu'un seul système de cordes communes, savoir It et $tabc$. Donc sur la droite It' on n'aura qu'un point de la hessienne : ce sera le point I, qu'on sait déjà lui appartenir, et It' sera une tangente d'inflexion.

Remarque. — I et t sont les points doubles de l'involution déterminée sur It par les polaires des points de abc. Si l'on considère un point quelconque du plan, sa

(*) Le point t est l'intersection de la tangente d'inflexion et de la corde de contact.

polaire coupera It suivant un des segments de l'involution. Ainsi la polaire d'un point quelconque intercepte sur une tangente d'inflexion un segment qui est divisé harmoniquement par le point d'inflexion et par le point où cette tangente coupe la corde de contact. Une propriété analogue existe pour la corde de contact; les points π, π' divisent harmoniquement le segment intercepté par la polaire d'un point quelconque. Ces points sont d'ailleurs imaginaires quand a, b, c sont réels.

XII. *Faisceaux de cubiques passant par neuf points.* — Lorsque plusieurs cubiques ont neuf points communs, les polaires d'un point quelconque forment un faisceau de coniques passant par quatre points. Soit a un des points d'intersection des polaires d'un point P par rapport à deux des cubiques du faisceau considéré; il est évident que, si l'on mène deux transversales aB, aC passant par deux des neuf points communs, les cubiques intercepteront sur ces transversales deux séries de segments en involution bb_1, $b'b'_1$, $b''b''_1, \ldots$, cc_1, $c'c'_1$, $c''c''_1, \ldots$. Prenons les centres des moyennes harmoniques de a par rapport aux groupes Bbb_1, B$b'b'_1, \ldots$, et par rapport aux groupes Ccc_1, C$c'c'_1, \ldots$, et soient β, β', $\beta'', \ldots$, γ, γ', $\gamma'', \ldots$ les deux séries de points ainsi obtenus : ces deux séries sont homographiques.

Mais, si l'on considère celle des courbes qui passe en a, le centre des moyennes harmoniques correspondant sur chaque transversale est le point a lui-même; donc les droites $\beta\gamma$, $\beta'\gamma'$, $\beta''\gamma'', \ldots$ qui joignent les points correspondants des deux divisions se coupent en un même point. C'est le point P, intersection des axes des moyennes harmoniques de a relatif aux deux cubiques considérées. P est donc le centre des moyennes harmoniques de a sur la droite aP par rapport à toutes les cubiques, ou, en

d'autres termes, a est un point commun à toutes les polaires de P, ce qu'il fallait prouver. Les polaires de P formant un système de coniques circonscrites à un quadrilatère, les axes des moyennes harmoniques de ce point forment un faisceau de droites convergentes.

Il résulte de ce qui précède que les cubiques d'un faisceau déterminent sur toute transversale une division par groupes de trois points telle, que les conjugués d'un point quelconque de la droite par rapport à tous les groupes forment un système en involution. Cette propriété peut servir de définition à ce mode de division par groupes de trois points, sans faire intervenir les faisceaux de courbes du troisième ordre, absolument comme l'involution ordinaire se définit indépendamment des faisceaux de coniques.

Lorsqu'on connaît deux groupes (a, a', a''), (b, b', b''), toute la division est déterminée, et l'on peut construire les points c', c'', qui doivent compléter un groupe quelconque dont on donne le premier point c. Prenons les conjugués (α, α'), (β, β') de c par rapport à (a, a', a''), (b, b', b''); comme c coïncide avec un de ses conjugués relatifs à (c, c', c''), il suffit de chercher le sixième point γ de l'involution déterminée par $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ et c pour avoir le second conjugué, et ce point γ sera le conjugué harmonique de c par rapport à $c'c''$. Qu'on prenne ensuite un point quelconque P sur la droite et ses conjugués $\alpha_p \alpha'_p$, $\beta_p \beta'_p$ relatifs aux groupes (a, a', a''), (b, b', b''); on cherchera ses conjugués relatifs à deux groupes (c, d', d''), (c, e', e''), choisis de telle sorte que $d'd''$, $e'e''$ divisent harmoniquement $c\gamma$. Soient $\delta\delta'$, $\varepsilon\varepsilon'$ ces deux couples de conjugués. On cherchera le segment xy appartenant à la fois à l'involution $\alpha_p \alpha'_p$, $\beta_p \beta'_p$ et à l'involution $\delta\delta'$, $\varepsilon\varepsilon'$; x, y seront les conjugués de P relativement à (c, c', c''). Dès lors on trouvera facilement $c'c''$; car la série de seg-

ments $d'd''$, $e'e''$,... en involution est homographique à la série $\delta\delta'$, $\varepsilon\varepsilon'$,.... On prendra trois segments $d'd''$, $e'e''$, $f'f''$ de la première involution, et l'on déterminera $c'c''$ par la condition

$$\text{rapport anharmonique}(d'd'', e'e'', f'f'', c'c'') = (\delta\delta', \varepsilon\varepsilon', \varphi\varphi', xy).$$

Les divisions par groupes de trois points que je viens de considérer admettent quatre points doubles, c'est-à-dire qu'il existe quatre groupes tels, que deux de leurs points soient confondus en un seul. Soient, en effet, $aa'a''$, $bb'b''$ deux groupes donnés; $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$ les conjugués d'un point P de la droite par rapport à chacun d'eux; $\alpha_1\alpha'_1$, $\beta_1\beta'_1$ ceux d'un point P_1. Tout point double est tel qu'il se confond avec un des conjugués d'un point quelconque par rapport au groupe auquel il appartient. Il suffira donc de chercher les segments des deux involutions $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, ..., $\alpha_1\alpha'_1$, $\beta_1\beta'_1$, ... qui ont une extrémité commune.

Ces deux séries se correspondent anharmoniquement; la solution du problème exige seulement la connaissance de trois segments homologues de chaque série, et elle se ramène ensuite à l'intersection de deux coniques (*voir* le Mémoire de M. Chasles *sur la construction des racines des équations du troisième et du quatrième degré*). Il y a donc quatre points doubles, comme je l'avais annoncé.

On conclut de là que, parmi les cubiques d'un faisceau, il y en a quatre qui touchent une droite donnée; il faut, pour les construire, chercher les points doubles de la division par groupes de trois points que le faisceau détermine sur la droite.

———

NOTE SUR LES ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. COMPAGNON,
Professeur au collége Stanislas.

Sur la bissectrice d'un angle et sur les bissectrices des angles d'un triangle.

Euclide, dans le premier Livre de ses *Éléments* (prop. IX), donne le moyen de mener la bissectrice d'un angle et, à partir de là, il n'est plus question de bissectrice que d .ns le quatrième Livre (prop. IV), lorsqu'il s'agit d'inscrire une circonférence dans un triangle donné. Or, ce dernier problème laisse à désirer, en ce qu'Euclide n'établit pas qu'on ne peut inscrire dans un triangle qu'une seule circonférence.

Legendre ne résout les deux problèmes précédents qu'à la fin de son second Livre (probl. V et XV); mais il ne démontre pas non plus que dans un triangle on ne peut inscrire qu'une seule circonférence.

M. Blanchet (qui a augmenté et modifié les *Éléments* de Legendre), a voulu éviter cette lacune, en démontrant dans le premier Livre (prop. XXI, 1re édit.) que la *bissectrice d'un angle est le lieu géométrique des points situés dans l'intérieur de cet angle, qui sont également distants de ses côtés*. Pour cela, il démontre d'abord une proposition directe, puis la proposition contraire et, au moyen de ces deux propositions, il peut conclure le lieu en question. Seulement, dans la démonstration de la proposition contraire, il emploie deux droites perpendiculaires à un même côté de l'angle considéré et il n'établit pas que ces deux droites ne peuvent pas se rencontrer.

D'ailleurs, il ne s'occupe pas du cas où l'angle proposé est obtus, ce qui rend encore sa démonstration incomplète.

Dans sa 7e édition (Liv. I, prop. XX), je vois que M. Blanchet a laissé la proposition contraire et qu'il lui a substitué la proposition réciproque; mais, lorsque l'angle proposé est obtus, si d'un point pris dans l'intérieur de cet angle on abaisse sur les côtés deux perpendiculaires, dont l'une tombe au sommet de l'angle ou sur le prolongement d'un côté au delà du sommet, et que l'on suppose ces perpendiculaires égales, la démonstration de la réciproque est tout à fait en défaut. A la vérité, il serait facile d'établir d'abord que ces deux perpendiculaires ne peuvent être égales; encore serait-il bon de le faire voir.

Le mieux, ce me semble, est de démontrer d'abord la proposition directe, puis la proposition contraire, en rejetant ces propositions après la théorie des parallèles, soit à cause des deux perpendiculaires à un même côté que j'ai signalées ci-dessus, soit parce que ces deux propositions et le lieu géométrique qui en résulte conduisent naturellement à se demander ce qui arriverait si les côtés de l'angle étaient remplacés par deux droites parallèles.

Ce n'est pas sans hésitation que je me décide à publier cette Note, à cause de son peu d'importance; toutefois, comme mes observations s'adressent également à tous les auteurs qui ont imité Legendre ou qui ont rédigé des éléments de géométrie, conformes aux programmes officiels (ce qui revient à très-peu près à avoir imité Legendre), j'ai cru utile de les faire connaître. Du reste, ces observations s'appliquent aussi aux éléments de géométrie, publiés à l'étranger, que j'ai entre les mains.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 57

(voir 1re série, t. I, p. 521);

PAR M. H. BROCARD,
Capitaine du Génie, à Biskra.

Étant données sur un plan les projections cylindriques ou coniques, ABC, A'B'C', *des intersections d'un cône quelconque par deux plans, et la projection* O *du sommet du cône, menez un rayon vecteur quelconque* OBB' *et les tangentes en* B, B'. *Ce rayon tournant autour de* O, *quel sera le lieu du point* X *d'intersection des tangentes?*

(FINCK.)

La construction du point X étant projective, le lieu de ce point peut être défini : la trace sur un plan quelconque de la tangente à une section plane quelconque. Or cette tangente se trouve toujours dans le plan de la section : sa trace est donc sur celle du plan sécant; en d'autres termes, le lieu du point X est une droite.

Question 139

(voir 1re série, t. V, p. 672);

PAR M. J. DE VIRIEU,
Professeur à Lyon.

Connaissant le dividende, le diviseur et le résidu d'une division, comment trouve-t-on les chiffres du quotient de droite à gauche?

1. Cette question se ramène à la suivante : trouver, de droite à gauche, les chiffres du quotient de deux entiers divisibles l'un par l'autre.

2. Quatre cas se présentent ; le diviseur est terminé :
1° par un chiffre pair significatif ;
2° par un 5 ;
3° par un zéro ;
4° par un chiffre impair autre que 5.

3. Le premier et le deuxième cas se ramènent au quatrième, en divisant les entiers donnés par la plus haute puissance, soit de 2, soit de 5, qui divise exactement le diviseur.

4. Le troisième cas se ramène à un des trois autres, en divisant les entiers par la plus haute puissance de 10 qui divise le diviseur.

5. On peut donc toujours supposer que le diviseur est terminé par un chiffre impair autre que 5.

6. Les produits des dix nombres d'un seul chiffre par un même chiffre impair autre que 5 sont terminés par des chiffres différents.

7. Les chiffres des unités d'un dividende et d'un diviseur divisibles l'un par l'autre suffisent pour déterminer le chiffre des unités du quotient, lorsque dans le diviseur ce chiffre est impair et autre que 5.

8. Si deux entiers sont divisibles l'un par l'autre, le chiffre des dizaines du quotient est le chiffre des unités du quotient d'une division ayant pour diviseur le diviseur donné et dont le dividende s'obtient en supprimant un zéro à la droite de la différence entre le dividende

donné et le produit du diviseur par le chiffre des unités du quotient correspondant.

Exemple.

Dividende.	Diviseur.	Chiffres du quotient.
470 790 806 200 000	6 637 587 500	»
4 707 908 062 000	66 375 875	»
37 663 264 496	531 007	8
37 659 016 44	»	2
37 648 396 3	»	9
37 170 490	»	0
37 170 49	»	7

Le quotient est 70928

Question 444

(voir 1re série, t. XVII, p. 262);

PAR M. C. MOREAU,
Capitaine d'Artillerie, à Constantine.

On a n urnes renfermant chacune les m premiers numéros. On tire un numéro de chaque urne; quelle est la probabilité que la somme des nombres sortis 1° soit égale à un nombre donné, 2° soit comprise entre deux nombres donnés.

1° Il est clair que la probabilité p_k, que la somme des numéros sortis soit égale à un nombre donné k, sera égale au coefficient de t^k dans le développement de la fonction

$$\left(\frac{t+t^2+t^3+\ldots+t^m}{m}\right)^n = \frac{1}{m^n}t^n(1-t^m)^n(1-t)^{-n}.$$

Or, si l'on désigne en général par C_a^b le nombre des com-

binaisons de a objets b à b, on a

$$(1-t^m)^n = 1 - C_n^1 t^m + C_n^2 t^{2m} - C_n^3 t^{3m} + \ldots,$$

$$(1-t)^{-n} = 1 + C_n^1 t + C_{n+1}^2 t^2 + \ldots + C_{k-1}^{k-n} t^{k-n} + \ldots.$$

On trouvera donc

$$p_k = \frac{1}{m^n}\left(C_{k-1}^{k-n} - C_n^1 C_{k-1-m}^{k-n-m} + C_n^2 C_{k-1-2m}^{k-n-2m} - \ldots\right);$$

ce qui peut s'écrire aussi

$$p_k = \frac{1}{m^n}\left(C_{k-1}^{n-1} - C_n^1 C_{k-1-m}^{n-1} + C_n^2 C_{k-1-2m}^{n-1} - \ldots\right).$$

Il est à peine nécessaire d'ajouter qu'on s'arrêtera, dans le calcul de ces formules, dès qu'on arrivera à un terme nul.

2° Soit $p_{k,l}$ la probabilité que la somme des numéros sortis soit égale au moins à k et au plus à $k+l$, on aura

$$p_{k,l} = p_k + p_{k+1} + \ldots + p_{k+l}.$$

Mais, pour faire cette addition, on peut remarquer que l'on a en général

$$C_a^b + C_{a+1}^b + C_{a+2}^b + \ldots + C_{a+c}^b = C_{a+c+1}^{b+1} + C_a^{b+1},$$

il viendra alors

$$p_{k,l} = \frac{1}{m^n}\Big[\left(C_{k+l}^n - C_{k-1}^n\right) - C_n^1\left(C_{k+l-m}^n - C_{k-1-m}^n\right) + C_n^2\left(C_{k+l-2m}^n - C_{k-1-2m}^n\right) - \ldots\Big].$$

Question 959

(voir 2e série, t. VIII, p. 480);

PAR M. WILLIÈRE,

Professeur à Arlon.

Une ellipse de grandeur constante se déplace en restant toujours tangente à une droite fixe HA *en un* D'

point déterminé A. *Dans chacune de ses positions on lui circonscrit un rectangle* HDCF *ayant sa base sur* HAD.

Trouver le lieu géométrique :

1° *Des foyers ;*

2° *Du centre ;*

3° *Des sommets* C, F *du rectangle circonscrit ;*

4° *Des points de contact* E, B, G *de ses côtés avec l'ellipse ;*

5° *La courbe enveloppe du grand axe.*

(BROCARD.)

Supposons qu'une ellipse, d'abord rapportée à ses axes, tourne d'un angle φ, et que son centre soit transporté en un point (α, β), l'équation de la courbe deviendra

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} & b^2[(x-\alpha)\cos\varphi + (y-\beta)\sin\varphi]^2 \\ & + a^2[(y-\beta)\cos\varphi - (x-\alpha)\sin\varphi]^2 = a^2b^2. \end{aligned} \right.$$

Les points d'intersection avec l'axe des x sont déterminés par l'équation

$$\begin{aligned} (x-\alpha)^2(b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi) + 2c^2\beta(x-\alpha)\sin\varphi\cos\varphi \\ + \beta^2(b^2\sin^2\varphi + a^2\cos^2\varphi) - a^2b^2 = 0. \end{aligned}$$

Les deux valeurs de $x-\alpha$, et, par suite, celles de x seront égales si l'on a

$$(2)\quad \beta^2 = b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi,$$

et elles seront nulles, si de plus

$$\alpha(b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi) = \beta c^2\sin\varphi\cos\varphi,$$

ou bien

$$(3)\quad \alpha = \frac{c^2\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}}.$$

1° *Lieu des foyers.* — Après le double mouvement, on a, pour les coordonnées du foyer,

(4) $$x = \alpha + c\cos\varphi,$$

(5) $$y = \beta + c\sin\varphi.$$

En multipliant les équations (2) et (3), on a

$$\alpha\beta = c^2 \sin\varphi \cos\varphi.$$

Des équations (4) et (5) on tire

$$\alpha\beta = (x - c\cos\varphi)(y - c\sin\varphi);$$

d'où l'on déduit

(6) $$cx\sin\varphi + cy\cos\varphi = xy.$$

D'un autre côté, la valeur $\beta = y - c\sin\varphi$, substituée dans l'équation (2), fournit

$$y^2 - 2cy\sin\varphi = b^2;$$

d'où

$$\sin\varphi = \frac{y^2 - b^2}{2cy},$$

et, en vertu de l'équation (6),

$$\cos\varphi = \frac{x(y^2 + b^2)}{2cy^2}.$$

Donc l'équation du lieu est

$$\frac{(y^2 - b^2)^2}{4c^2y^2} + \frac{x^2(y^2 + b^2)^2}{4c^2y^4} = 1$$

ou

$$(x^2 + y^2)(y^2 + b^2)^2 = 4a^2y^4,$$

et en coordonnées polaires

$$\rho\sin^2\omega(2a - \rho) = b^2.$$

2° *Lieu du centre.* — Pour avoir le lieu du centre,

il suffit d'éliminer φ entre les équations (2) et (3). La première donne

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{\beta^2 - b^2}}{c},$$

et, par suite, en vertu de l'équation

$$\alpha\beta = c^2 \sin\varphi \cos\varphi,$$

on a

$$\cos\varphi = \frac{\alpha\beta}{c\sqrt{\beta^2 - b^2}},$$

d'où

$$\frac{\beta^2 - b^2}{c^2} + \frac{\alpha^2\beta^2}{c^2(\beta^2 - b^2)} = 1.$$

Mettant x et y à la place de α et β, l'équation devient

$$x^2y^2 + (y^2 - a^2)(y^2 - b^2) = 0.$$

3° *Lieu des sommets* C, F. — D'abord, il est clair que l'équation d'une tangente parallèle à l'axe des x est

(7) $$y = 2\beta.$$

D'autre part, pour qu'une droite $x = k$ soit tangente à l'ellipse, il faut que l'on ait

$$c^4 \sin^2\varphi \cos^2\varphi (k - \alpha)^2$$
$$= (b^2 \sin^2\varphi + a^2 \cos^2\varphi)(b^2 \cos^2\varphi + a^2 \sin^2\varphi)(k - \alpha)^2$$
$$- a^2 b^2 (b^2 \sin^2\varphi + a^2 \cos^2\varphi) = 0,$$

ou

$$k = \alpha \pm \sqrt{b^2 \sin^2\varphi + a^2 \cos^2\varphi}.$$

Donc l'équation d'une tangente parallèle à l'axe des y est

(8) $$x - \alpha = \sqrt{b^2 \sin^2\varphi + a^2 \cos^2\varphi}.$$

Éliminant β entre les équations (2) et (7), il vient

$$\frac{y^2}{4} = b^2 + c^2 \sin^2\varphi,$$

ou

$$\sin^2\varphi = \frac{y^2 - 4b^2}{4c^2},$$

d'où

$$\cos^2\varphi = \frac{4a^2 - y^2}{4c^2}.$$

De même, éliminant α entre les équations (3) et (8), et remplaçant $\sin^2\varphi$ et $\cos^2\varphi$ par leurs valeurs, il vient

$$y\left[2x - \sqrt{4(a^2 + b^2) - y^2}\right] = 4c^2 \sin\varphi \cos\varphi.$$

D'où, en élevant au carré et remplaçant encore $\sin^2\varphi$ et $\cos^2\varphi$ par leurs valeurs, on a

$$x^2y^2 + 4a^2b^2 = xy^2\sqrt{4(a^2 + b^2) - y^2},$$

et l'équation du lieu est

$$(x^2y^2 + 4a^2b^2)^2 = x^2y^4[4(a^2 + b^2) - y^2],$$

ou

$$x^2y^4(x^2 + y^2 - 4a^2 - 4b^2) + 8a^2b^2x^2y^2 + 16a^4b^4 = 0.$$

4° *Lieu des points de contact.* — Je commence par chercher le lieu du point de contact de la tangente parallèle à l'axe des x.

Il est clair qu'il faut éliminer α, β, φ entre les équations (1), (2), (3) et (7).

Pour cela, il suffit de prendre les valeurs de α et β dans les équations (2) et (3), les substituer dans l'équation (1), puis remplacer $\sin^2\varphi$ et $\cos^2\varphi$ respectivement par

$$\frac{y^2 - 4b^2}{4c^2} \quad \text{et} \quad \frac{4a^2 - y^2}{4c^2},$$

ce qui conduit très-facilement à l'équation du lieu

$$x^2y^2+y^4-4y^2(a^2+b^2)+16a^2b^2=0$$

ou

$$y^2(x^2+y^2-4a^2-4b^2)+16a^2b^2=0.$$

Pour avoir l'équation du lieu des points de contact des tangentes parallèles à l'axe des y, il faut éliminer α, β, φ entre les équations (1), (2), (3) et (8).

Si d'abord on élimine $x-\alpha$ entre l'équation (8) et l'équation (1), on trouve

$$(9)\qquad y-\beta=\frac{c^2\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{b^2\sin^2\varphi+a^2\cos^2\varphi}},$$

équation qui peut remplacer l'équation (1).

En ajoutant l'équation (8) à l'équation (2), on trouve

$$(10)\qquad (x-\alpha)^2+\beta^2=a^2+b^2.$$

D'autre part, si l'on multiplie l'équation (9) par l'équation (8), puis l'équation (2) par l'équation (3), il vient

$$(x-\alpha)(y-\beta)=c^2\sin\varphi\cos\varphi,$$
$$\alpha\beta=c^2\sin\varphi\cos\varphi;$$

d'où

$$(11)\qquad xy-\alpha y-\beta x=0.$$

On tire immédiatement des équations (10) et (11)

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} x-\alpha&=x\sqrt{\frac{a^2+b^2}{x^2+y^2}},\\ \beta&=y\sqrt{\frac{a^2+b^2}{x^2+y^2}}.\end{aligned}\right.$$

Mais si nous éliminons φ entre les deux équations

$$\beta^2=b^2\cos^2\varphi+a^2\sin^2\varphi$$

et

$$\alpha\beta = c^2 \sin\varphi \cos\varphi,$$

nous trouvons

$$\beta^2(\alpha^2 + \beta^2 - a^2 - b^2) + a^2 b^2 = 0,$$

ou, en vertu de l'équation (10)

$$x\beta^2(2\alpha - x) + a^2 b^2 = 0.$$

Enfin, si nous substituons dans cette dernière les valeurs de α et de β tirées des relations (12), nous avons pour l'équation du lieu

$$(x^2+y^2)[x^2y^2(a^2+b^2)+a^2b^2+(x^2+y^2)]^2 = 4x^4y^4(a^2+a^2)^3.$$

5° *Enveloppe du grand axe.* — L'équation du grand axe est

$$y - \beta = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}(x - \alpha),$$

ou, en remplaçant α et β par leurs valeurs tirées des équations (2) et (3),

$$y\cos\varphi - x\sin\varphi = \frac{b^2\cos\varphi}{\sqrt{b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}}.$$

Il faut donc éliminer φ entre cette dernière équation et l'équation dérivée

$$y\sin\varphi + x\cos\varphi = \frac{a^2b^2\sin\varphi}{(\sqrt{b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi})^3}.$$

Posant

$$\sqrt{b^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi} = \mathrm{R},$$

la question revient à éliminer R entre les deux équations

$$\mathrm{R}^4(x^2+y^2) - \mathrm{R}^3b^2y - \mathrm{R}a^2b^2y + a^2b^4 = 0,$$

$$\mathrm{R}^4(x^2+y^2) - 2\mathrm{R}^3b^2y$$
$$+ \mathrm{R}^2(b^4 - a^2y^2 - b^2x^2) + 2\mathrm{R}a^2b^2y - a^2b^4 = 0,$$

dont on déduit facilement

$$R^3 b^2 y - R^2(b^4 - a^2y^2 - b^2x^2) - 3Ra^2b^2y + 2a^2b^4 = 0,$$
$$2R^3(x^2+y^2) - 3R^2b^2y + R(b^4 - a^2y^2 - b^2x^2) + a^2b^2y = 0;$$

ce qui conduit à l'équation

$$\begin{vmatrix} 2U^4Z^2 - 3b^4y^2 & -b^2y(U^4+6a^2Z^2) & b^2(y^2-4Z^2) \\ b^2y(U^4+6a^2Z^2) & 8a^2b^4y^2+4a^2b^4Z^2+U^8 & y(6b^4-U^4) \\ a^2b^2(y^2-4Z^2) & -a^2y(6b^4-U^4) & -(3a^2y^2+2U^4) \end{vmatrix} = 0,$$

en posant

$$x^2+y^2 = Z^2$$

et

$$b^4 - a^2y^2 - b^2x^2 = U^4.$$

C'est une équation du dixième degré.

Note. — Nous avons reçu deux autres solutions de la question 959 : l'une de M. Guébhard, étudiant en médecine, à Paris ; l'autre de M. R. Blondlot, élève de Mathématiques spéciales au lycée de Nancy.

Question 996

(voir 2e série, t. IX, p. 288);

PAR M. GENTY,

Ingénieur des Ponts et Chaussées, à Sidi-bel-abbès.

On donne une surface du second degré et un tétraèdre abcd; si l'on désigne par A, B, C, D *les faces de ce tétraèdre opposées aux sommets a, b, c, d, et par* A′, B′, C′, D′ *les plans polaires de ces sommets, la somme*

$$\sum \frac{\cos(A, A')}{(a, A)\,(o, A')},$$

dans laquelle o est le centre de la surface, est constante, quel que soit le tétraèdre abcd. Donner la valeur de la

constante. (On désigne par (a, A) *la distance du point a au plan* A, *etc.)* (H. Faure.)

Soient x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point a; x_2, y_2, z_2 celles du point b;..., et

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + d = 0$$

l'équation de la surface du 2e degré.

Désignons par Δ le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y^2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix},$$

qui représente six fois le volume du tétraèdre $abcd$; par (M_{x1}) le mineur obtenu en supprimant dans ce déterminant la ligne et la colonne qui contiennent x_1; etc.

L'équation du plan A sera

$$x(M_{x1}) + y(M_{y1}) + z(M_{z1}) + \ldots = 0,$$

et celle du plan A'

$$axx_1 + byy_1 + czz_1 + d = 0;$$

donc on aura

$$\cos(A, A') = \frac{ax_1(M_{x1}) + by_1(M_{y1}) + cz_1(M_{z1})'}{\sqrt{a^2x_1^2 + b^2y_1^2 + c^2z_1^2}\sqrt{(M_{x1})^2 + (M_{y1})^2 + (M_{z1})^2}}.$$

On a d'ailleurs

$$(a, A) = \frac{\Delta}{\sqrt{(M_{x1})^2 + (M_{y1})^2 + (M_{z1})^2}},$$

$$(o, A') = \frac{d}{\sqrt{a^2x_1^2 + b^2y_1^2 + c^2z_1^2}};$$

donc

$$\frac{\cos(A, A')}{(a, A)(o, A')} = \frac{ax_1(M_{x1}) + by_1(M_{y1}) + cz_1(M_{z1})}{d\Delta}.$$

En ajoutant à cette expression les trois résultats analogues obtenus en considérant successivement les autres sommets et les autres faces du tétraèdre, on voit que le coefficient de a, dans la somme, sera

$$\frac{x_1(\mathrm{M}_{x1}) + x_2(\mathrm{M}_{x2}) + x_3(\mathrm{M}_{x3}) + x_4(\mathrm{M}_{x4})}{d\Delta} = \frac{1}{d}.$$

Donc on a

$$\sum \frac{\cos(\mathrm{A}, \mathrm{A}')}{(a, \mathrm{A})(o, \mathrm{A}')} = \frac{a+b+c}{d}.$$

Le second membre représente la somme des inverses des carrés des axes de la surface donnée.

Note. — M. Genty nous a envoyé également une solution de la question 990.

CORRESPONDANCE.

M. Burnier, de Lausanne, nous communique l'énoncé de ce théorème de Géométrie élémentaire :

Si, du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle, on abaisse une perpendiculaire sur l'hypoténuse, les cubes des côtés de l'angle droit sont entre eux comme les projections des segments de l'hypoténuse sur les mêmes côtés.

On peut ajouter que :

Si l'on projette sur l'hypoténuse les projections dont il s'agit, on aura deux droites qui seront entre elles dans le rapport des quatrièmes puissances des côtés de l'angle droit du triangle rectangle considéré ; que si ces nouvelles projections sont projetées elles-mêmes sur les côtés du triangle rectangle considéré, il en résultera deux droites

qui seront entre elles comme les cinquièmes puissances des côtés de l'angle droit, et ainsi de suite. Cette construction réitérée donne deux droites proportionnelles à des puissances $m^{\text{ièmes}}$ des côtés de l'angle droit; et, de là, la solution de ce problème: *Trouver deux droites qui soient entre elles comme les puissances $m^{\text{ièmes}}$ de deux droites données.* (G.)

Extrait d'une Lettre de M. Louis Saltel à M. Catalan.

Soient, dans un même plan, une figure quelconque Σ, trois coniques S_1, S_2, S_3 et un point P. Si, sur la droite Pm qui joint le point P à un point quelconque m de Σ, et qui coupe S_1, S_2, S_3 en α_1, β_1, α_2, β_2, α_3, β_3, on prend le point m' homologue à m dans les deux séries homographiques définies par ces trois couples de points, le lieu Σ' du point m' sera l'*hyperdésarguesienne* de Σ.

Cette transformation générale renferme, comme cas particuliers : *la transformation homographique, la transformation homologique, la transformation homothétique, la transformation perspective, la transformation par rayons vecteurs réciproques, et la transformation désarguesienne....*

Presque tous les théorèmes de la *Géométrie supérieure* de M. Chasles peuvent être immédiatement démontrés et transformés....

La question 990 a été résolue par M. Henri d'Ovidio, professeur à Naples. Les questions 965 et 1047 ont été résolues par M. A. Chervet, élève en Mathématiques spéciales au lycée de Moulins; la question 1047 l'a été également par M. Gambey, professeur au lycée de Saint-Étienne.

QUESTIONS.

1065. On donne une conique et deux points A et B dans l'espace. Par ces deux points, on mène un plan qui rencontre la conique en deux points A' et B'. Trouver le lieu du point M d'intersection des couples de droites (AA', BB') et (AB', BA'). Cas particuliers.

(H. Brocard.)

1066. Quelque valeur entière et positive que l'on donne à a et à m, on a

$$a^{2m+3} < \frac{a(a+1)(2a+1)(3a^2+3a+1)^m}{2.3^m} < (a+1)^{2m+3}.$$

(S. Realis.)

1067. Parmi toutes les ellipses qui passent par quatre points, trouver celle dont l'aire est minimum.

(T. Doucet.)

1068. Désignons par t_{ij} la longueur de la tangente commune à deux cercles i et j. Il faut et il suffit, pour que quatre cercles 1, 2, 3, 4 soient tangents à un même cercle, que l'on ait

$$t_{12}t_{34} \pm t_{13}t_{24} \pm t_{14}t_{23} = 0.$$

Application aux quatre cercles inscrits et exinscrits à un triangle.

1069. Si trois coniques ont deux à deux un foyer commun, leurs cordes communes concourent trois à trois. Cas particuliers.

(E. Lemoine.)

1070. L'équation $\frac{du}{dx} = \sqrt{1+au^2+bu^4}$ définit une fonction u, si l'on donne la condition $u=0$, pour $x=0$.

C'est une fonction impaire de x, et, dans son développement suivant les puissances de x, le coefficient de $\frac{x^{2n+1}}{1.2.3\ldots(2n+1)}$ est de la forme

$$a^n + \lambda_1 a^{n-2} b + \lambda_2 a^{n-4} b^2 + \lambda_3 a^{n-6} b^3 + \ldots.$$

On a

$$\lambda_1 = \frac{3^{2n+1} - 3}{16} - \frac{3n}{2},$$

$$\lambda_2 = \frac{5^{2n+1} - 5}{256} + \frac{3^{2n+3} - 3^3}{64} + \frac{9^{n^2}}{8} - \left(\frac{3^{2n+2}}{32} + \frac{39}{16}\right) n.$$

Tous ces nombres λ_1, λ_2, λ_3, ... sont entiers. Démontrer les résultats précédents. (F. Didon.)

1071. Les deux circonférences menées par les foyers d'une conique, et qui touchent une tangente de cette conique, se coupent toujours sous le même angle.

(H. Faure.)

1072. Une sphère de rayon constant se déplace en restant tangente à une droite èt à un cylindre de révolution donnés ; trouver le lieu du point de contact sur le cylindre. (Mannheim.)

1073. L'équation

$$x^3 - \frac{4+p}{3} x^2 + \frac{p(1+p)}{2.3} x + \frac{(2-p)p(1+p)}{2.3} = 0,$$

dans laquelle $0 < p < 1$, a une racine α comprise entre zéro et l'unité, et l'on a

$$\int_0^\alpha x^{-p}(1-x)^{p-1}\,dx + \frac{2.3.4}{(2-p)(1-p)p(1+p)} \int_0^{1-\alpha} x^{1+p}(1-x)^{2-p}\,dx = \frac{\pi}{\sin p\pi}.$$

(S. Realis.)

SUR L'INTÉGRATION DES FRACTIONS RATIONNELLES;

PAR M. HERMITE.

Le procédé élémentaire d'intégration des fractions rationnelles $\frac{F_1(x)}{F(x)}$ peut être présenté sous une forme telle, que la résolution de l'équation $F(x) = 0$ ne soit plus nécessaire pour le calcul de la partie algébrique de l'intégrale, mais seulement pour en obtenir la partie transcendante. Dans ce but, on mettra d'abord le dénominateur, au moyen de la théorie des racines égales, sous la forme suivante :

$$F(x) = A^{\alpha+1} B^{\beta+1} \ldots L^{\lambda+1},$$

A, B, ..., L étant des polynômes tels, que l'équation $AB \ldots L = 0$ n'ait que des racines simples, et l'on fera ensuite

$$\frac{F_1(x)}{F(x)} = \frac{P}{A^{\alpha+1}} + \frac{Q}{B^{\beta+1}} + \ldots + \frac{S}{L^{\lambda+1}},$$

P, Q, ..., S étant des fonctions entières.

Cela posé, l'intégrale $\int \frac{P\,dx}{A^{\alpha+1}}$ se traitera comme il suit : nous effectuerons sur A et sa dérivée A' les opérations du plus grand commun diviseur, de manière à obtenir deux polynômes G et H, satisfaisant à la condition

$$AG - A'H = 1.$$

Nous formerons ensuite deux séries de fonctions entières :

$$V_0,\ V_1, \ldots,\ V_{\alpha-1},$$
$$P_1,\ P_2, \ldots,\ P_\alpha,$$

par ces relations, où les polynômes Q, Q_1, Q_2,... sont entièrement arbitraires, savoir :

$$\begin{aligned}
\alpha V_0 &= HP - AQ,\\
(\alpha - 1)V_1 &= HP_1 - AQ_1,\\
(\alpha - 2)V_2 &= HP_2 - AQ_2,\\
&\vdots\\
V_{\alpha-1} &= HP_{\alpha-1} - AQ_{\alpha-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_1 &= GP - A'Q - V'_0,\\
P_2 &= GP_1 - A'Q_1 - V'_1,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots,\\
P_\alpha &= GP_{\alpha-1} - A'Q_{\alpha-1} - V'_{\alpha-1}.
\end{aligned}$$

Maintenant je prouverai qu'en faisant

$$\begin{aligned}
V &= V_0 + AV_1 + A^2V_2 + \dots + A^{\alpha-1}V_{\alpha-1},\\
U &= P_\alpha,
\end{aligned}$$

on a l'égalité

$$\frac{P}{A^{\alpha+1}} = \frac{U}{A} + \left(\frac{V}{A^\alpha}\right)';$$

d'où

$$\int \frac{P\,dx}{A^{\alpha+1}} = \int \frac{U\,dx}{A} + \frac{V}{A^\alpha},$$

de sorte que $\frac{V}{A^\alpha}$ est la partie algébrique de l'intégrale proposée, et $\int \frac{U\,dx}{A}$ la partie transcendante.

A cet effet, j'élimine G et H entre les trois égalités

$$\begin{aligned}
AG - A'H &= 1,\\
(\alpha - i)V_i &= HP_i - AQ_i,\\
P_{i+1} &= GP_i - A'Q_i - V'_i,
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$AP_{i+1} = P_i + (\alpha - i)A'V_i - AV'_i.$$

Or on peut écrire cette relation de la manière suivante :

$$\frac{P_i}{A^{\alpha-i+1}} - \frac{P_{i+1}}{A^{\alpha-i}} = \left(\frac{V_i}{A^{\alpha-i}}\right)'.$$

En supposant ensuite $i = 0, 1, 2, \ldots, \alpha - 1$ et ajoutant membre à membre, nous en conclurons

$$\frac{P}{A^{\alpha+1}} - \frac{P_\alpha}{A} = \left(\frac{V_0}{A^\alpha} + \frac{V_1}{A^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{V_{\alpha-1}}{A}\right)',$$

ce qui fait bien voir qu'on satisfait à la condition proposée

$$\frac{P}{A^{\alpha+1}} = \frac{U}{A} + \left(\frac{V}{A^\alpha}\right)'$$

par les valeurs

$$V = V_0 + AV_1 + A^2V_2 + \ldots + A^{\alpha-1}V_{\alpha-1},$$
$$U = P_\alpha,$$

comme il s'agissait de le démontrer.

J'ai dit que les polynômes $Q, Q_1, Q_2, \ldots$ étaient arbitraires; on pourra donc en disposer de manière que les degrés de $V_0, V_1, V_2, \ldots V_{\alpha-1}$, soient moindres que le degré de A; on pourra aussi les supposer tous nuls, ce qui donnera, par exemple,

$$\alpha V_0 = HP,$$
$$\alpha(\alpha - 1)V_1 = H[(\alpha G - H')P - HP'],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ces deux suppositions se concilient dans le cas de l'intégrale $\int \frac{dx}{(x^2+1)^{\alpha+1}}$, que je choisis comme application

de la méthode. Nous aurons alors

$$A = x^2 + 1, \quad A' = 2x,$$

$$G = 1, \qquad H = \frac{x}{2},$$

puis successivement

$$\alpha V_0 = \frac{x}{2},$$

$$(\alpha - 1) V_1 = \frac{2\alpha - 1}{2\alpha} \frac{x}{2},$$

$$(\alpha - 2) V_2 = \frac{(2\alpha - 1)(2\alpha - 3)}{2\alpha(2\alpha - 2)} \frac{x}{2},$$

$$(\alpha - 3) V_3 = \frac{(2\alpha - 1)(2\alpha - 3)(2\alpha - 5)}{2\alpha(2\alpha - 2)(2\alpha - 4)} \frac{x}{2},$$

$$\vdots$$

$$V_{\alpha-1} = \frac{(2\alpha - 1)(2\alpha - 3)\ldots 5.3}{2\alpha(2\alpha - 2)\ldots 6.4} \frac{x}{2},$$

$$P = 1,$$

$$P_1 = \frac{2\alpha - 1}{2\alpha},$$

$$P_2 = \frac{(2\alpha - 1)(2\alpha - 3)}{2\alpha(2\alpha - 2)},$$

$$\vdots$$

$$P_\alpha = \frac{(2\alpha - 1)(2\alpha - 3)\ldots 3.1}{2\alpha(2\alpha - 2)\ldots 4.2}.$$

Nous retrouvons ainsi la relation bien connue, à laquelle on parvient ordinairement au moyen de l'intégration par parties, savoir :

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^{\alpha+1}} = \frac{1.3.5\ldots(2\alpha - 1)}{2.4.6\ldots 2\alpha} \operatorname{arctang} x + \frac{x}{2(x^2 + 1)^\alpha}$$
$$\times \left[\frac{1}{\alpha} + \frac{2\alpha - 1}{2\alpha} \frac{x^2 + 1}{\alpha - 1} + \frac{(2\alpha - 1)(2\alpha - 3)}{2\alpha(2\alpha - 2)} \frac{(x^2 + 1)^2}{\alpha - 2} + \ldots \right].$$

SUR LE NOMBRE DE NORMALES RÉELLES QUE L'ON PEUT MENER D'UN POINT DONNÉ A UN ELLIPSOÏDE

(suite, voir même tome, p. 8);

PAR JOACHIMSTHAL.

V.

Soient α et β les carrés des demi-axes de la section diamétrale de l'ellipsoïde parallèle au plan tangent à cette surface au point (x_0, y_0, z_0); on a

$$(4^*)\quad \left\{\begin{aligned} x_0^2 &= \frac{a(a-\alpha)(a-\beta)}{(a-b)(a-c)},\\ y_0^2 &= \frac{b(b-\alpha)(b-\beta)}{(b-a)(b-c)},\\ z_0^2 &= \frac{c(c-\alpha)(c-\beta)}{(c-a)(c-b)}. \end{aligned}\right.$$

Les rayons de courbure principaux en ce point sont $\frac{\alpha}{\pi}$ et $\frac{\beta}{\pi}$; de plus, on a

$$\pi^2\alpha\beta = abc.$$

En désignant par (X, Y, Z) un des centres de courbure, on a

$$\frac{X-x_0}{\frac{x_0}{a}} = \frac{Y-y_0}{\frac{y_0}{b}} = \frac{Z-z_0}{\frac{z_0}{c}} = -\alpha \quad \text{ou} \quad -\beta;$$

et, par suite,

$$(18)\quad \begin{cases} X^2 = \dfrac{(a-u)^3(a-w)}{a(a-b)(a-c)}, \\ Y^2 = \dfrac{(b-u)^3(b-w)}{b(b-a)(b-c)}, \\ Z^2 = \dfrac{(c-u)^3(c-w)}{c(c-a)(c-b)}, \end{cases}$$

formules où l'on doit poser soit $u=\alpha$ et $w=\beta$, soit $u=\beta$ et $w=\alpha$, suivant celui des centres de courbure que l'on considère.

Lorsque l'on fait varier u depuis a jusqu'à b, pendant que w varie depuis b jusqu'à c, le lieu du point (X, Y, Z) est une surface F_1, qui est le lieu des centres de courbure principaux maximum; si, au contraire, on fait varier u de b à c et w de a à b, le lieu est une seconde surface F_2, qui est le lieu des centres de courbure principaux minimum; F_1 et F_2 sont les deux nappes d'une même surface, lieu des centres de courbure principaux de l'ellipsoïde, dont l'équation s'obtiendrait en éliminant u et w entre les équations (18).

Toute droite menée par l'origine des coordonnées rencontre F_1 (et de même F_2) en deux points également distants de cette origine.

En effet, si l'on pose

$$\frac{X}{l} = \frac{Y}{m} = \frac{Z}{n},$$

l, m et n désignant des constantes, u et w sont déterminées par les équations suivantes

$$(19)\quad l^2 : m^2 : n^2 = \frac{(a-u)^3(a-w)}{a(a-b)(a-c)} : \frac{(b-u)^3(b-w)}{b(b-a)(b-c)} : \frac{(c-u)^3(c-w)}{c(c-a)(c-b)};$$

d'où l'on déduit

$$(20)\qquad \frac{al^2}{(a-u)^2}+\frac{bm^2}{(b-u)^2}+\frac{cn^2}{(c-u)^2}=0.$$

Un mode de discussion bien connu fait voir immédiatement que cette équation n'a que deux racines réelles, l'une comprise entre a et b, l'autre comprise entre b et c.

De l'équation (19) on déduit qu'à toute valeur réelle de u, comprise entre a et b, correspond une valeur réelle de v comprise entre b et c, et qu'à toute valeur réelle de u comprise entre b et c correspond une valeur réelle de v comprise entre a et b. Par suite, F_1 et F_2 sont des surfaces fermées.

Cherchons maintenant à déterminer les intersections de la normale à l'ellipsoïde au point (x_0, y_0, z_0) avec les surfaces F_1 et F_2.

X, Y, Z désignant les coordonnées d'un des points d'intersection, outre les équations (18), on doit encore avoir les équations

$$\frac{X-x_0}{\frac{x_0}{a}}=\frac{Y-y_0}{\frac{y_0}{b}}=\frac{Z-z_0}{\frac{z_0}{c}}=-v.$$

Si nous tirons de là les valeurs de X, Y, Z pour les porter dans les équations (18), u, w et v seront déterminés par les relations

$$(21)\qquad \left\{\begin{array}{l}(a-u)^2(a-w)=(a-v)^2(a-\alpha)(a-\beta),\\(b-u)^2(b-w)=(b-v)^2(b-\alpha)(b-\beta),\\(c-u)^2(c-w)=(c-v)^2(c-\alpha)(c-\beta).\end{array}\right.$$

Pour $u=a$, la première de ces équations donne $v=a$, et les deux autres

$$-w=a-\alpha-\beta+\frac{(a-\alpha)(a-\beta)}{b-a},$$

$$-w=a-\alpha-\beta+\frac{(a-\alpha)(a-\beta)}{c-a},$$

résultats qui impliquent une contradiction, puisque $(a-\alpha)$ et $(a-\beta)$ sont différents de zéro; le même fait a lieu lorsque l'on pose

$$u=b \quad \text{et} \quad u=c.$$

Des équations (21) on tire les relations suivantes

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{(a-v)^2(a-\alpha)(a-\beta)}{(a-u)^2(a-b)(a-c)}+\frac{(b-v)^2(b-\alpha)(b-\beta)}{(b-u^2)(b-a)(b-c)}\\ &\qquad\qquad+\frac{(c-v)^2(c-\alpha)(c-\beta)}{(b-u)^2(c-a)(c-b)}-1=0, \end{aligned}\right.$$

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{(a-v)^2(a-\alpha)(a-\beta)}{(a-u)^3(a-b)(a-c)}+\frac{(b-v)^2(b-\alpha)(b-\beta)}{(b-u)^3(b-a)(b-c)}\\ &\qquad\qquad+\frac{(c-v)^3(c-\alpha)(c-\beta)}{(c-u)^3(c-a)(c-b)}=0. \end{aligned}\right.$$

Réciproquement, de ces deux relations on peut déduire les équations (21); car $(a-b)$, $(b-c)$, $(c-a)$, étant différents de zéro, on peut toujours mettre trois grandeurs arbitraires γ, γ' et γ'', sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \gamma &= \varepsilon+\varepsilon' a+\varepsilon'' a^2,\\ \gamma' &= \varepsilon+\varepsilon' b+\varepsilon'' b^2,\\ \gamma'' &= \varepsilon+\varepsilon' c+\varepsilon'' c^2. \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant écrire les relations (22) et (23) sous la forme suivante

$$\frac{\gamma}{(a-b)(a-c)}+\frac{\gamma'}{(b-a)(b-c)}+\frac{\gamma''}{(c-a)(c-b)}=1,$$

et

$$\begin{aligned} &\frac{\gamma}{(a-b)(a-c)}\,\frac{1}{a-u}+\frac{\gamma'}{(b-a)(b-c)}\,\frac{1}{b-u}\\ &\qquad\qquad+\frac{\gamma''}{(c-a)(c-b)}\,\frac{1}{c-u}=0. \end{aligned}$$

Si nous donnons à γ, γ' et γ'' les valeurs précédentes, on voit que ε'' est égal à 1, et que γ, γ' et γ'' doivent être respectivement égaux à $(a-u)(a-w)$, $(b-u)(b-w)$, $(c-u)(c-w)$.

Remarquons maintenant que z_1 étant une racine double de l'équation $f(z)=0$, qui n'annule pas la fonction entière $F(z)$, on a à la fois

$$\frac{f(z)}{F(z)}=0 \quad \text{et} \quad \frac{d\,\dfrac{f(z)}{F(z)}}{dz}=0;$$

d'après cela, on doit prendre pour v les valeurs pour lesquelles l'équation (22) acquiert des racines égales, et pour u la valeur commune à ces racines, à l'exception, toutefois, des valeurs a, b et c.

L'équation (22) ne diffère pas de l'équation (5), que, d'après les considérations exposées aux §§ I et II, on peut écrire de la façon suivante

$$\frac{(u-v)^2(u-\alpha)(u-\beta)}{(u-a)(u-b)(u-c)} \times\left(\frac{1}{u-a}+\frac{1}{u-b}+\frac{1}{u-c}-\frac{1}{u-\alpha}-\frac{1}{u-\beta}-\frac{2}{u-v}\right)=0,$$

ou encore

$$\frac{(u-v)}{(u-a)^2(u-b)^2(u-c)^2} \times[W(u-v)-2(u-a)(u-b)(u-c)(u-\alpha)(u-\beta)]=0.$$

Pour que cette équation ait une racine double, il faut que l'on ait $u=v$ (alors on a $u=\alpha$ ou $u=\beta$, puisque l'on exclut les valeurs a, b et c), ou bien que le second facteur ait une racine double.

On a, dans ce cas,

$$\frac{1}{u-a}+\frac{1}{u-b}+\frac{1}{u-c}-\frac{1}{u-\alpha}-\frac{1}{u-\beta}-\frac{2}{u-v}=0,$$

et

$$\frac{1}{(u-a)^2}+\frac{1}{(u-b)^2}+\frac{1}{(u-c)^2}-\frac{1}{(u-\alpha)^2}-\frac{1}{(u-\beta)^2}\frac{2}{(u-v)^2}=0;$$

on est ainsi ramené à la considération de l'équation (10) déjà traitée.

Les équations (22) et (23) ont les six solutions communes

$$v=\beta,\ v_1,\ v_2,\ \alpha,\ v_3,\ v_4,$$
$$u=\beta,\ u_1,\ u_2,\ \alpha,\ u_3,\ u_4.$$

A chaque couple de valeurs de u et v correspond, d'après l'équation (21), une valeur réelle de w, qui est comprise entre a et b, si u est comprise entre b et c, et réciproquement.

La normale au point (x_0, y_0, z_0) de l'ellipsoïde rencontre la surface F_1 aux trois points désignés par (α), (v_3) et (v_4) dans le § IV, et la surface F_2 aux trois points désignés par (β), (v_1) et (v_2).

La normale a, avec chacune de ces surfaces, un nombre impair de points communs, parce qu'elle les touche toutes les deux, à savoir : F en (α) et en F_2 (β). Pour le voir analytiquement, on peut se reporter aux formules (18), on remarque immédiatement que le discriminant de (5) ou de

$$(u-v)[W(u-v)-2(u-a)(u-b)(u-c)(u-\alpha)(u-\beta])$$

contient évidemment les facteurs quadratiques $(v-\alpha)^2$ et $(v-\beta)^2$.

Mais comme cette circonstance importe peu dans la présente recherche, nous n'insisterons pas sur ce point.

Les résultats obtenus dans le § IV peuvent s'énoncer de la façon suivante :

Toute normale à l'ellipsoïde qui n'est pas dans le plan

d'une section principale rencontre chacune des nappes F_1 et F_2 de la surface lieu des centres de courbure, abstraction faite des centres de courbure principaux (α) et (β) relatifs à la normale considérée, en deux autres points (ν_3) et (ν_4), et (ν_1) et (ν_2). Chacune des cordes interceptées sur la normale par les nappes F_1 et F_2 contient un des points (α) et (β); de plus, ces deux cordes sont contiguës, c'est-à-dire qu'elles ont une partie commune, ou bien que l'une renferme l'autre.

D'un point donné, on peut mener à l'ellipsoïde un nombre de normales réelles égales à six, quatre ou deux, suivant que le point se trouve à l'intérieur des surfaces F_1 et F_2, à l'intérieur de l'une et à l'extérieur de l'autre, ou enfin à l'extérieur de ces deux surfaces.

Remarque. — Pour compléter ces résultats, il faut encore considérer le cas où le point donné se trouve dans le plan d'une des sections principales.

Le plan des (xy) coupe les surfaces F_1 et F_2 suivant les courbes

$$(24)\qquad (ax^2)^{\frac{1}{3}} + (by^2)^{\frac{1}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{1}{3}},$$

$$(25)\qquad \frac{ax^2}{(a-c)^2} + \frac{by^2}{(b-c)^2} = 1.$$

Des pieds des normales passant par le point (ξ, η), quatre sont situés dans le plan des (xy), et leur réalité dépend de la position du point par rapport à la courbe (24). Les deux autres sont en dehors du plan des (xy) et leur réalité dépend de la position du point par rapport à la courbe (25).

SUR LES PROPRIÉTÉS DES SECTIONS CONIQUES QUI SE RATTACHENT A L'INTÉGRATION DE L'ÉQUATION D'EULER;

PAR M. LAGUERRE.

1. Tous les géomètres connaissent, depuis les découvertes de Poncelet et de Jacobi, les liens étroits qui rattachent entre elles la théorie des fonctions elliptiques et les propriétés des polygones qui sont à la fois inscrits dans une section conique et circonscrits à une autre conique.

Bien que cette question soit maintenant parfaitement connue, je crois cependant, pour les lecteurs des *Nouvelles Annales*, devoir la développer dans tous ses détails.

2. Étant donnée une conique dont l'équation soit

$$f(x, y) = 0,$$

j'appelle *puissance* d'un point par rapport à cette conique la valeur que prend le polynôme $f(x, y)$, quand on substitue à x et à y les valeurs des coordonnées de ce point; et je m'appuierai principalement sur les deux lemmes suivants, dont le premier est une conséquence immédiate d'un théorème bien connu de Newton, sur les transversales des courbes algébriques.

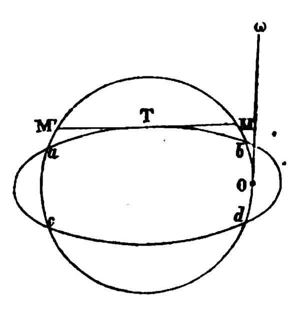
Lemme I. — Soient M et M′ deux points situés dans le plan d'une conique, et α, β les deux points où la droite MM′ coupe la conique; cela posé, les puissances des points M et M′, relativement à cette courbe, sont proportionnelles aux produits

$$M\alpha.M\beta \quad \text{et} \quad M'\alpha.M'\beta.$$

Lemme II. — Soient M et M′ deux points situés dans le plan d'une conique; si, par ces deux points, on mène un cercle quelconque qui coupe la conique en a, b, c, d, les puissances des points M et M′, par rapport à la conique, sont proportionnelles aux produits

$$Ma.Mb.Mc.Md \quad \text{et} \quad M'a.M'b.M'c.M'd \; (*).$$

3. Cela posé, considérons un cercle et une conique se coupant aux points a, b, c et d. Imaginons une tan-



gente mobile qui roule sur la conique; soit T le point où elle touche cette conique, et M, M′ les deux points où elle coupe le cercle.

Nous supposerons, pour plus de simplicité, le rayon du cercle pris pour unité, et nous fixerons la position de chaque point du cercle par l'angle que fait la droite, joignant le point donné à un point fixe O pris sur le cercle, avec la tangente Oω menée au cercle en ce point.

La tangente mobile occupant une certaine position, déplaçons-la infiniment peu; φ et φ' désignant les angles

(*) Voir, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, janvier 1865, ma Note sur les propriétés générales des courbes algébriques, et, *Nouvelles Annales*, 2e série, t. IX, p. 188, une Note de M. Grant intitulée : *Démonstration d'un théorème de géométrie*.

qui fixent les positions des points M et M',

$$2d\varphi \quad \text{et} \quad 2d\varphi'$$

mesureront les arcs décrits par ces points, et l'on aura évidemment

$$\frac{d\varphi}{\text{MT}} = \frac{d\varphi'}{\text{M'T}}.$$

Désignons, pour un instant, par

$$\pi(\text{M}) \quad \text{et} \quad \pi(\text{M}')$$

les puissances des points M et M' relativement à la conique; on a, en vertu du lemme I,

$$\frac{\pi(\text{M})}{\pi(\text{M}')} = \frac{\overline{\text{MT}}^2}{\overline{\text{M'T}}^2};$$

d'autre part, en vertu du lemme II,

$$\frac{\pi(\text{M})}{\pi(\text{M}')} = \frac{\text{M}a.\text{M}b.\text{M}c.\text{M}d}{\text{M}'a.\text{M}'b.\text{M}'c.\text{M}'d};$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\text{MT}}{\text{M'T}} = \frac{\sqrt{\text{M}a.\text{M}b.\text{M}c\ \text{M}d}}{\sqrt{\text{M}'a.\text{M}'b.\text{M}'c.\text{M}'d}},$$

et, par conséquent,

$$(1) \qquad \frac{d\varphi}{\sqrt{\text{M}a.\text{M}b.\text{M}c.\text{M}d}} = \frac{d\varphi'}{\sqrt{\text{M}'a.\text{M}'b.\text{M}'c.\text{M}'d}}.$$

4. Désignons par

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma, \quad \delta$$

les angles qui fixent les positions des points a, b, c, d sur le cercle; nous aurons

$$\text{M}a = 2\sin(\varphi - \alpha), \quad \text{M}'a = 2\sin(\varphi' - \alpha), \ldots;$$

et l'équation précédente deviendra, en développant et

divisant par $\cos^2\varphi$,

$$\frac{d\,\mathrm{tang}\,\varphi}{\sqrt{(\mathrm{tg}\varphi-\mathrm{tg}\alpha)(\mathrm{tg}\varphi-\mathrm{tg}\beta)(\mathrm{tg}\varphi-\mathrm{tg}\gamma)(\mathrm{tg}\varphi-\mathrm{tg}\delta)}}$$
$$=\frac{d\,\mathrm{tang}\,\varphi'}{\sqrt{(\mathrm{tg}\varphi'-\mathrm{tg}\alpha)(\mathrm{tg}\varphi'-\mathrm{tg}\beta)(\mathrm{tg}\varphi'-\mathrm{tg}\gamma)(\mathrm{tg}\varphi'-\mathrm{tg}\delta)}};$$

ou encore, en posant pour abréger

$$\mathrm{tang}\,\varphi=x,\quad \mathrm{tang}\,\varphi'=y,\quad \mathrm{tang}\,\alpha=\mathrm{A},\quad \mathrm{tang}\,\beta=\mathrm{B},\ldots,$$

$$(1)'\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{dx}{\sqrt{(x-\mathrm{A})(x-\mathrm{B})(x-\mathrm{C})(x-\mathrm{D})}}\\&=\frac{dy}{\sqrt{(y-\mathrm{A})(y-\mathrm{B})(y-\mathrm{C})(y-\mathrm{D})}};\end{aligned}\right.$$

c'est l'équation différentielle dont l'étude sert de base à la théorie des fonctions elliptiques, et qui a été intégrée pour la première fois par Euler.

5. Les considérations géométriques qui précèdent donnent immédiatement cette intégrale. On satisfait évidemment, en effet, à l'équation précédente [ou à l'équation (1)], si l'on suppose que les angles φ et φ' correspondent à deux points M et M', tels que la corde MM' enveloppe une conique passant par les points a, b, c et d; comme l'équation des coniques qui passent par ces points renferme une constante arbitraire, on voit que l'on a l'intégrale générale de l'équation.

Considérons trois points quelconques a, b, c communs au cercle et à la conique; on sait que, MT désignant une tangente quelconque à cette conique, et (a), (b), (c) désignant les distances à cette droite des points a, b, c, on a, quelle que soit la tangente, la relation

$$\lambda\sqrt{(a)}+\mu\sqrt{(b)}+\nu\sqrt{(c)}=0,$$

où λ, μ, ν désignent des quantités constantes pour la même conique, mais qui renferment une quantité arbi-

traire, si l'on considère toutes les coniques qui passent par les points a, b, c et d.

Joignons aux points M et M′ les points a, b et c; les aires des triangles MaM', MbM', McM', ayant même base, sont entre elles comme leurs hauteurs

$$(a),\quad (b),\quad (c);$$

les aires de ces triangles, dont les angles aux sommets sont égaux, sont entre elles comme les produits

$$aM.aM',\quad bM.bM',\quad cM.cM';$$

on a donc

$$\frac{(a)}{aM.aM'}=\frac{(b)}{bM.bM'}=\frac{(c)}{cM.cM'}.$$

D'où

$$\lambda\sqrt{aM.aM'}+\mu\sqrt{bM.bM'}+\nu\sqrt{cM.cM'}=0,$$

et nous avons là l'intégrale générale des équations (1) et (1′).

En introduisant les angles φ, φ', α, ..., ou plutôt leurs tangentes y, x, A, ..., elle prendra la forme connue (*)

$$\lambda\sqrt{(y-A)(x-A)}+\mu\sqrt{(y-B)(x-B)}+\nu\sqrt{(y-C)(x-C)}=0.$$

6. La forme précédente de l'intégrale, bien qu'élégante, a le défaut de ne pas mettre en évidence la constante arbitraire qui y entre et de ne pas contenir symétriquement les quantités A, B, C, D.

Pour trouver une autre forme de l'intégrale, je prendrai pour point de départ la proposition suivante :

Théorème. — *Soit une conique passant par quatre points a, b, c et d d'un cercle; une tangente mobile roule sur cette conique. Si l'on désigne par* M *et* M′ *les deux points où, dans une de ses positions, cette tangente*

(*) Darboux : *Recherches sur les surfaces orthogonales* (*Annales scientifiques de l'École Normale*, t. II.)

coupe le cercle, et si l'on partage d'une façon quelconque en deux groupes a et b, c et d, les quatre points communs au cercle et à la conique, le rapport

$$\frac{\sqrt{\mathrm{M}a.\mathrm{M}b.\mathrm{M}'c.\mathrm{M}'d} - \sqrt{\mathrm{M}c.\mathrm{M}d.\mathrm{M}'a.\mathrm{M}'b}}{\mathrm{MM}'}$$

reste constant, lorsque la tangente se déplace tangentiellement à la conique.

Il résulte de là que K désignant une constante arbitraire, l'intégrale de l'équation d'Euler est

$$\sqrt{\mathrm{M}a.\mathrm{M}b.\mathrm{M}'c.\mathrm{M}'d} - \sqrt{\mathrm{M}c.\mathrm{M}d.\mathrm{M}'a.\mathrm{M}'b} = \mathrm{K}.\mathrm{MM}',$$

ou encore, en introduisant les quantités x, y, A, B,...,

$$\sqrt{(x-\mathrm{A})(x-\mathrm{B})(y-\mathrm{C})(y-\mathrm{D})} - \sqrt{(y-\mathrm{A})(y-\mathrm{B})(x-\mathrm{C})(x-\mathrm{D})} = \mathrm{K}(x-y).$$

7. Le résultat précédent, qui est peut-être nouveau, peut se mettre sous la forme suivante :

Étant donnée l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{f(y)}},$$

où $f(x)$ représente un polynôme du quatrième degré en x, si l'on décompose d'une manière arbitraire le polynôme $f(x)$ en deux facteurs du second degré, en posant

$$f(x) = \theta(x)\varphi(x),$$

l'intégrale générale de cette équation est

$$\frac{\sqrt{\theta(x)\varphi(y)} - \sqrt{\theta(y)\varphi(x)}}{x-y} = \mathrm{K},$$

K *désignant une constante arbitraire.*

REMARQUES SUR UNE FAMILLE DE COURBES PLANES;

PAR M. ALLÉGRET,

Professeur de Mathématiques à la Faculté des Sciences de Clermont.

Le théorème énoncé dans les *Nouvelles Annales* (t. IX, 2ᵉ série, p. 31) vient de donner lieu à quelques recherches de M. Nicolaïdès, insérées dans la seconde et la troisième livraison de ses *Analectes*, ouvrage qu'il publie à l'imprimerie nationale d'Athènes. Ce travail, après avoir rappelé mon attention sur le même sujet, me fournit l'occasion de présenter quelques observations qu'on ne trouvera peut-être pas dénuées de tout intérêt.

J'ai fait voir, dans l'article cité, que *le cercle osculateur en un point de la courbe*

$$(1) \qquad r^m = a^m \cos m\theta$$

intercepte, sur le rayon mené du pôle au point de contact, une corde qui est toujours avec ce rayon dans le rapport constant de 2 *à* $1+m$, et j'ai ajouté que cette propriété *ne convient qu'aux courbes précédentes.* On obtient, en effet, pour l'équation différentielle qui détermine en coordonnées polaires toutes les courbes qui y satisfont (*loc. cit.*),

$$(2) \qquad \frac{r^2 + \left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2}{r^2 + 2\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\dfrac{d^2r}{d\theta^2}} = \frac{2}{1+m}.$$

Cette équation, après avoir été mise sous la forme

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dr}{r\,d\theta}\right) + m\left[1 + \left(\frac{dr}{r\,d\theta}\right)^2\right] = 0,$$

s'intègre sans difficulté en prenant pour variable auxiliaire $\frac{dr}{r\,d\theta}$, et l'on trouve pour intégrale générale, en désignant par g et h deux constantes arbitraires,

$$r^m = g\cos(m\theta - h), \tag{3}$$

qui est identique avec (1), sauf un changement insignifiant dans la direction de l'axe polaire et dans l'unité de longueur.

M. Nicolaïdès, après avoir fait remarquer dans ses *Analectes* (p. 65) que la spirale logarithmique jouit aussi de la propriété précédente, pense que son équation ne rentre pas dans la forme (1) ou dans la forme équivalente (3). On peut néanmoins démontrer que cela a lieu pour les valeurs infiniment petites de l'exposant m. On aura en effet alors, en négligeant les infiniment petits du second ordre par rapport à m,

$$r = [g\cos(m\theta - h)]^{\frac{1}{m}} = (g\cos h + mg\sin h\,\theta)^{\frac{1}{m}},$$

et, en prenant pour unité de longueur $g\cos h$ et remarquant que, d'après un théorème connu,

$$(1 + km)^{\frac{1}{m}} = e^k,$$

il vient, pour équation de la courbe (3), $r = e^{\tang h\theta}$, qui est celle de la spirale logarithmique.

Au reste, l'exception signalée par M. Nicolaïdès se rapporte évidemment au cas tout particulier de $m = 0$, et, comme l'équation (2) a pour intégrale la spirale logarithmique et que l'intégrale (3) prend alors la forme $r = 1^\infty$, il est naturel de considérer la courbe (3) comme renfermant encore cette spirale à la limite, suivant l'usage ordinaire, et c'est une remarque que j'ai faite dans mon cours, il y a deux ans, pour prévenir l'objection précédente, qui est d'ailleurs fort naturelle.

Cette explication donnée, en même temps que la méthode même qui m'a fait découvrir le théorème en question, je dois maintenant faire un aveu que l'équité exige, c'est que ce théorème n'est point nouveau, comme je l'ai cru tout d'abord. Il a été énoncé sous une forme très-peu différente par le célèbre Colin Maclaurin, dans le premier volume de son *Traité des fluxions,* édité à Édimbourg, en 1740 (prop. XXXIV du chap. XI). Le même savant a aussi fait connaître et a appliqué dans plusieurs endroits du même ouvrage la méthode ingénieuse qui consiste à faire correspondre les points M et L de deux courbes planes AM, AL (*), en établissant entre les rayons vecteurs SM $= r$, SL $= r_1$, menés d'un pôle S, et les angles MSA $= \theta$ et LSA $= \theta_1$, formés avec le même axe polaire, les deux relations

$$r_1 = r^m, \quad \theta_1 = m\theta,$$

en prenant pour m un nombre quelconque. Si l'on désigne par ρ et ρ_1 les rayons de courbure en M et L, par n et n_1 les normales MV et LV$_1$, déterminées par les perpendiculaires SV et SV$_1$ élevées en S aux rayons vecteurs SM et SL, et qu'on retranche du premier rayon de courbure $\frac{\rho - n}{m} = h$, Maclaurin démontre qu'on aura la proportion

$$\frac{n_1}{\rho_1} = \frac{h}{\rho} \quad \text{ou} \quad \frac{n_1}{\rho_1} = \frac{\rho - \frac{1}{m}(\rho - n)}{\rho} = 1 - \frac{1}{m}\left(1 - \frac{n}{\rho}\right),$$

qui, mise sous cette forme

$$\frac{n}{\rho} - 1 = m\left(1 - \frac{n_1}{\rho_1}\right),$$

(*) Le lecteur est prié de se reporter à la figure 173 de l'ouvrage de Maclaurin ou de tracer lui-même la figure, ce qui n'offre aucune difficulté.

coïncide avec l'équation trouvée de son côté par M. Nicolaïdès, à la page 59 de ses *Analectes*. On en déduit sans difficulté, comme M. Nicolaïdès l'a fait, en prenant pour la première courbe AM un cercle passant par le pôle S, le théorème que j'ai donné dans les *Nouvelles Annales*, et qui forme le corollaire IV de la proposition citée de Maclaurin.

Je ferai une autre observation sur les courbes (1). La lemniscate de Jacques Bernoulli (qui y rentre dans le cas de $m = 2$) a été imaginée par ce géomètre pour représenter par l'arc de cette courbe l'une ou l'autre des deux transcendantes

$$\int \frac{a^2\,dz}{\sqrt{a^4 - z^4}} \quad \text{ou} \quad \int \frac{a^2\,dz}{\sqrt{z^4 - a^4}},$$

en prenant pour variable z le rayon vecteur de la lemniscate ou son inverse (voir *Opera Jac. Bernoulli*, t. I, p. 611). Les efforts de ce géomètre et de ses successeurs ne me paraissent pas avoir été aussi heureux dans la représentation analogue de la transcendante

$$\int \frac{z^2\,dz}{\sqrt{a^4 - z^4}},$$

qui exprime, comme on sait, l'ordonnée de la courbe élastique dont l'abscisse serait z.

Maclaurin a démontré, dans son *Traité des fluxions* (t. II, chap. v, n° 927), que si l'on abaisse du centre d'une hyperbole équilatère une perpendiculaire sur les tangentes, et qu'on mesure ensuite la distance interceptée sur la tangente, depuis le pied de la perpendiculaire jusqu'au point de contact, ainsi que l'arc d'hyperbole du sommet au même point, on aura la courbe élastique, en prenant pour abscisse la perpendiculaire précédente, et pour ordonnée l'excès de la tangente sur

l'arc considéré. Cette construction ne me semble pas apporter un perfectionnement important à celle que Jacques Bernoulli avait proposée lui-même (*Opera*, t. I, p. 612), en faisant dépendre l'ordonnée de la courbe élastique de la rectification d'une ellipse et de celle de la lemniscate. Car on peut considérer la portion de la tangente à l'hyperbole, dans le théorème de Maclaurin, comme équivalente, en réalité, à l'arc indéfini d'une courbe algébrique rectifiable, en sorte que l'ordonnée de la courbe élastique dépend de deux rectifications différentes dans l'une et l'autre des deux méthodes.

On peut faire servir la rectification de la courbe

$$r^2 = a^2 \left(\cos \frac{2\theta}{3}\right)^3,$$

appartenant à la famille (1) ($m = \frac{2}{3}$) pour résoudre le même problème. On obtient en effet, pour la différentielle de l'arc s de cette courbe en fonction du rayon vecteur r,

$$ds = \frac{a^{\frac{2}{3}}\, dr}{\sqrt{a^{\frac{4}{3}} - r^{\frac{4}{3}}}};$$

si l'on fait ensuite $r = \dfrac{z^3}{a^2}$, en prenant z pour variable auxiliaire, il viendra

$$ds = \frac{3z^2\, dz}{\sqrt{a^4 - z^4}};$$

donc, en prenant pour abscisse $3z = 3a \cos \dfrac{2\theta}{3}$, et pour ordonnée l'arc s correspondant à l'angle θ de la courbe précédente, on obtiendra la courbe élastique.

Ce théorème se rattache à un ensemble de recherches que j'espère pouvoir publier bientôt, au moins en partie, dans un Mémoire spécial. En abordant certains cas assez étendus du problème de la rectification inverse, je suis

parvenu à démontrer qu'en transformant une épicycloïde quelconque par les rayons réciproques menés du centre du cercle fixe, on obtient une courbe dont l'arc indéfini représente exactement la fonction elliptique de troisième espèce, à deux paramètres arbitraires (savoir le module et le paramètre proprement dit). Dans quelques cas particuliers, cet arc est égal à un arc de cercle, ou à un arc d'hyperbole, ou encore à la fonction elliptique de première espèce. On retrouve ainsi, dans le dernier cas, les courbes étudiées autrefois par M. J.-A. Serret, et dont ce géomètre a donné une construction moins simple, reproduite à la page 272 de son récent *Traité de Calcul intégral*. Mes propres résultats vont d'ailleurs bien au delà de ceux qui sont consignés dans les divers Mémoires du savant académicien sur cette matière; car ils montrent la possibilité de construire une infinité de courbes algébriques différentes dont l'arc représente exactement la fonction elliptique de première espèce et de module donné égal à la racine carrée d'un nombre commensurable quelconque. Ces théorèmes, ainsi que beaucoup d'autres, sont démontrés dans le Mémoire que j'annonce, et dont j'ai adressé la première partie au ministère de l'Instruction publique, en attendant un éditeur qui veuille bien se charger de l'impression.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME FONDAMENTAL RELATIF AU POLE ET A LA POLAIRE DANS LE CERCLE;

Par M. COMPAGNON,
Professeur au collége Stanislas.

Cette démonstration est fondée sur une proposition qui, je pense, n'a pas encore été remarquée et qui est un co-

rollaire de ce théorème : *Si une droite* AB *est divisée harmoniquement par deux points* C *et* D, *la moitié de cette droite est moyenne proportionnelle entre les distances de son milieu* E *aux points conjugués.*

Fig. 1.

A E C B D

Voici ce corollaire : *Si une droite* AB *est divisée harmoniquement par deux points* C *et* D, *le produit des distances de l'un de ces points aux extrémités de cette droite est égal au produit des distances de ce même point au milieu de la droite et au second point conjugué.* Car on a

$$\begin{aligned} DA \times DB &= (DE + AE)(DE - AE) \\ &= \overline{DE}^2 - \overline{AE}^2 \\ &= \overline{DE}^2 - DE \times EC \\ &= DE \times DC. \end{aligned}$$

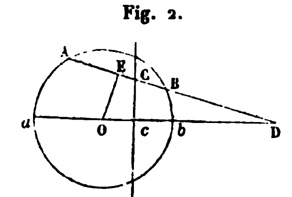
On aurait de même

$$CA \times CB = CE \times CD.$$

Cela posé, nous allons démontrer le théorème en question.

Théorème. — *Si, par un point* D *pris dans le plan d'un cercle* O, *on mène une sécante quelconque* DBA

Fig. 2.



et qu'on détermine le conjugué harmonique C *du point par rapport à* AB, *le lieu géométrique du point* C,

lorsque la sécante tourne autour du point D, *est une ligne droite perpendiculaire au diamètre ab qui passe par le point* D.

Déterminons le point c du lieu situé sur le diamètre ab, c'est-à-dire le conjugué harmonique du point D par rapport à ab ; menons la droite Cc et abaissons OE perpendiculaire à la corde AB. Puisque le point E est le milieu de la droite AB divisée harmoniquement par les points C et D, on a

$$\mathrm{DA} \times \mathrm{DB} = \mathrm{DE} \times \mathrm{DC}.$$

De même,

$$\mathrm{D}a \times \mathrm{D}b = \mathrm{DO} \times \mathrm{D}c.$$

Mais

$$\mathrm{DA} \times \mathrm{DB} = \mathrm{D}a \times \mathrm{D}b;$$

donc

$$\mathrm{DE} \times \mathrm{DC} = \mathrm{DO} \times \mathrm{D}c.$$

De cette égalité il résulte que le quadrilatère OECc est inscriptible et, comme l'angle OEC est droit, l'angle OcC l'est pareillement; donc le lieu géométrique du point C est la droite Cc perpendiculaire à DO et passant par le point c conjugué harmonique du point D par rapport au diamètre ab.

Je laisse au lecteur le soin de démontrer ce théorème dans le cas où le point D est situé à l'intérieur du cercle.

DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DES FORMULES RELATIVES A LA SOMMATION DES PILES DE BOULETS;

PAR M. H. BROCARD,

Capitaine du Génie, à Biskra.

Dans tous les cours de Mathématiques spéciales, on fait précéder la solution de ce problème de la recherche de la formule qui donne la somme des puissances sem-

blables des termes d'une progression arithmétique. Cette méthode peut être simplifiée par une considération élémentaire.

Assimilons la pile de boulets à un prisme dans lequel chaque élément constituant serait une sorte de rhomboèdre qui tiendrait la place de chaque boulet, mais qui aurait l'avantage de pouvoir former, avec des éléments égaux, des tranches du prisme dont chacune renfermerait, par suite, autant de rhomboèdres qu'il y aurait de boulets. L'assimilation de la pile à un prisme est donc possible et, dès lors, la sommation se réduira à la recherche du volume d'un prisme oblique. Une déformation de ces rhomboèdres ne changera pas leur nombre; on peut donc appliquer à ces prismes obliques la formule qui convient à un prisme droit, c'est-à-dire que l'on regardera le nombre de boulets d'une face oblique comme représentant la surface de la section droite.

Cela posé, la formule générale sera dès lors

$$x = \frac{a + a' + a''}{3} F,$$

F désignant le nombre de boulets renfermés dans une face triangulaire oblique; a, a', a'', les nombres de boulets formant les trois arêtes aboutissant à cette face (*).

Nous allons appliquer cette formule aux différents cas de la pratique et vérifier qu'elle conduit bien aux mêmes résultats.

1° Pile triangulaire :

$$F = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$a = 1, \quad a' = 1, \quad a'' = n,$$

$$x = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

(*) Cette formule se trouve, comme résultat empirique, à la page 197 des *Éléments d'Algèbre* de M. Rouché. (Ch. B.)

2° **Pile quadrangulaire :**

$$F = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$a = n, \quad a' = 1, \quad a'' = n,$$

$$x = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3° Pile rectangulaire. — Les côtés de la base renferment m et n boulets. L'arête supérieure est donc composée de $(m - n + 1)$ boulets. Ainsi

$$F = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$a = m, \quad a' = m - n + 1, \quad a'' = m,$$

$$x = \frac{n(n+1)(3m - n + 1)}{6}.$$

4° Pile rectangulaire à retour d'équerre. — Soient m, m' n les nombres de boulets des deux grands côtés extérieurs et du petit côté. L'ensemble peut être regardé comme formé d'une pile rectangulaire dont la base a pour côtés m et n boulets, sur laquelle s'appuie une pile prismatique dont la base oblique a $\frac{m(n+1)}{2}$ boulets, chaque arête en renfermant $(m' - n)$. Mais celle-ci peut être placée sur le prolongement de la première, et alors on forme ainsi une pile rectangulaire dont la base a $(m + m' - n)$ et n boulets. Le nombre total sera donc

$$x = \frac{n(n+1)(3m + 3m' - 4n + 1)}{6}.$$

On passera facilement au cas de la pile à retour d'équerre figurant un T, ou un double T, ou une croix, ou divers côtés d'un périmètre rectangulaire.

La méthode précédente est, comme on voit, très-simple, et facile à retenir et à exposer.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 441

(voir 1re série, t. XVII, p. 187);

PAR M. C. MOREAU,
Capitaine d'Artillerie, à Constantine.

Le produit de plusieurs nombres consécutifs ne peut être une puissance parfaite lorsqu'un de ces nombres est premier absolu. (MATHIEU.)

Cette propriété est une conséquence immédiate du postulatum de M. Bertrand.

Il résulte, en effet, de ce postulatum que, pour $a \geq 2$. il y a au moins un nombre premier entre a et $2a$.

Or, pour que le produit de plusieurs nombres consécutifs puisse être une puissance parfaite, il faut évidemment, si l'un d'eux est un nombre premier absolu p, que son double $2p$ s'y trouve aussi; mais, d'après ce qui a été dit plus haut, le nombre premier q immédiatement supérieur à p est toujours compris entre p et $2p$: il fait donc partie du produit; et, en continuant le même raisonnement, on voit que le produit considéré devrait contenir tous les nombres premiers supérieurs à p, ce qui est impossible puisqu'il est forcément limité. Donc, etc.

Question 953

(voir 2e série, t. VIII, p. 336);

PAR M. MORET-BLANC,
Professeur au lycée du Havre.

1° *Trouver deux entiers n et p* $(n < p)$ *tels, qu'on ait*

$$1 + 2 + \ldots + n = (n + 1) + \ldots + p.$$

Ce problème revient à l'un quelconque des deux suivants :

Trouver un entier tel, que son carré augmenté de 1 *soit égal au double d'un carré ; ou*

Trouver deux entiers consécutifs tels, que la somme de leurs carrés soit égale à un carré.

2° *Trouver deux nombres entiers n et p tels, qu'on ait*

$$1 + 2 + \ldots + n = p^2.$$

Ce problème revient à l'un quelconque des deux suivants :

Trouver un entier tel, que son carré diminué de 1 *soit égal au double d'un carré ; ou*

Trouver deux entiers consécutifs tels, que la somme de leurs carrés soit égale à un carré augmenté de 1.

(LAISANT.)

1° Exprimant que la somme des deux membres de l'égalité est double du premier, on a

$$\frac{p(p+1)}{2} = n(n+1) \quad \text{ou} \quad p^2 + p = 2n^2 + 2n.$$

Multipliant cette dernière égalité successivement par 4 et par 2, et ajoutant 1, il vient

$$(2p+1)^2 = 2(2n+1)^2 - 1,$$
$$p^2 + (p+1)^2 = (2n+1)^2.$$

2°

$$n(n+1) = 2p^2 \quad \text{ou} \quad n^2 + n = 2p^2.$$

Les mêmes opérations donnent

$$(2n+1)^2 = 2(2p)^2 + 1,$$
$$n^2 + (n+1)^2 = 4p^2 + 1.$$

On reconnaît les divers énoncés des deux questions.

Revenons à la première, et considérons l'équation

$$2(2n+1)^2 - 1 = (2p+1)^2,$$

où, pour abréger, nous poserons $2n+1 = x$, $2p+1 = y$; ce qui donne

$$(1) \qquad 2x^2 - 1 = y^2,$$

où x et y devront être des nombres entiers impairs. On aperçoit immédiatement une solution, $x = 1$, $y = 1$.

Bien qu'elle soit étrangère à la question qui nous occupe (elle donne $n = 0$, $p = 0$), nous allons voir que toute solution de l'équation (1) en fait trouver une seconde, celle-ci une troisième, et ainsi de suite indéfiniment.

En effet, soit $x = h$, $y = k$ une solution de l'équation (1), en sorte que

$$2h^2 - 1 = k^2.$$

Retranchant cette égalité de (1), il vient

$$2(x^2 - h^2) = y^2 - k^2$$

ou

$$2(x+h)(x-h) = (y+k)(y-k).$$

Multiplions les deux membres par rs, r et s étant deux indéterminées; on a

$$2rs(x+h)(x-h) = rs(y+k)(y-k),$$

équation à laquelle on peut satisfaire en posant

$$2r(x-h)=s(y+k),$$
$$s(x+h)=r(y-k);$$

d'où l'on tire

$$x=\frac{(2r^2+s^2)h+2rsk}{2r^2-s^2},\quad y=\frac{(2r^2+s^2)k+4rsh}{2r^2-s^2}.$$

Ces valeurs seront en général fractionnaires; mais, si l'on pose

$$\frac{2r^2+s^2}{2r^2-s^2}=u,\quad \frac{2rs}{2r^2-s^2}=v,$$

les valeurs de x et y deviendront

$$x=hu+kv,\quad y=2hv+ku;$$

u et v devant satisfaire seulement à la condition

(2) $$u^2-2v^2=1;$$

x et y seront des nombres entiers, si l'on prend pour u et v des entiers satisfaisant à l'équation (2). Or une solution s'aperçoit immédiatement

$$u=3,\quad v=2.$$

Remplaçant u et v par ces valeurs dans les expressions de x et y, on a

(3) $$x=3h+2k,\quad y=4h+3k.$$

Remplaçant h et k d'abord par 1, puis successivement par les dernières valeurs trouvées pour x et y, on obtient les séries de valeurs suivantes :

$x=1$	5	29	169	985	5741	33461	...;
$y=1$	7	41	239	1393	8119	47321	

d'où l'on tire pour n et pour p les séries de valeurs

$n=0$	2	14	84	492	2870	16730	....
$p=0$	3	20	119	696	4059	23660	

Remarque. — Chaque valeur de x ou de y, à partir de la troisième, est égale à 6 fois la précédente, moins l'antéprécédente. Cette loi, qu'on peut vérifier sur les valeurs précédentes, est facile à démontrer.

Soient x', x'', x''' trois valeurs consécutives de x; y', y'', y''' les valeurs correspondantes de y. On aura

$$x'' = 3x' + 2y', \quad y'' = 4x' + 3y',$$
$$x''' = 3x'' + 2y'', \quad y''' = 4x'' + 3y''.$$

Éliminant successivement entre ces quatre équations les y et les x, on trouve

$$x''' = 6x'' - x', \quad y''' = 6y'' - y'.$$

Résolvons maintenant l'équation

$$(2n + 1)^2 = 2(2p)^2 + 1,$$

ou, en posant $2n + 1 = y$, $2p = x$,

$$y^2 = 2x^2 + 1.$$

Elle est identique à l'équation (2). On en connaît donc une solution

$$y = 3, \quad x = 2,$$

et la formule (3), qui est encore applicable à ce cas, permettra d'en déduire d'autres.

On trouve ainsi

$x = 2$	12	70	408	2378	13860	80782	...;
$y = 3$	17	99	577	3363	19601	114243	

d'où

$n = 1$	8	49	288	1681	9800	57121	....
$p = 1$	6	35	204	1189	6930	40391	

La loi de formation des valeurs de x et y est la même que dans le cas précédent.

Remarque. — La substitution d'un autre des systèmes précédents de valeurs de x, y au système 2 et 3 dans les valeurs attribuées à u et à v ne donne pas des valeurs différentes de celles que nous avons obtenues.

Question 975

(voir 2e série, t. VIII, p. 563);

PAR M. A. GUÉBHARD,
Étudiant en Médecine.

Étant donnés une surface du second ordre et un plan quelconque, trouver sur cette surface un réseau de courbes conjuguées (c'est-à-dire telles que les tangentes à ces courbes en un point soient conjuguées relativement à l'indicatrice) se projetant sur le plan suivant un réseau orthogonal. (RIBAUCOUR.)

Si nous posons, d'après la notation habituelle,

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$
$$dp = r\,dx + s\,dy,$$
$$dq = s\,dx + t\,dy,$$

les cosinus des angles que font avec les axes coordonnés deux tangentes conjuguées sont proportionnels à

$$dx, \quad dy, \quad p\,dx + q\,dy,$$
$$dp, \quad -dq, \quad p\,dq - q\,dp.$$

Par conséquent, si nous prenons pour plan des xy le plan donné, l'équation différentielle du réseau orthogonal, projection du réseau conjugué cherché, sera

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dq},$$

ou

$$(1) \qquad \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{r-t}{s}\frac{dy}{dx} - 1 = 0.$$

Soit la surface proposée

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2$$
$$+ 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0.$$

Si ce n'est point une surface cylindrique, elle a pour contour apparent sur le plan donné une certaine conique réelle ou imaginaire dont nous pouvons prendre un foyer pour origine et l'axe focal pour axe des x. Les coefficients de l'équation de la surface vérifieront alors les relations

$$BB' - A''B'' = 0,$$
$$BC'' - C'A'' = 0,$$

$$(B'C'' - CA'')^2 + (C''^2 - A''D)[B^2 - A'A'' - (B'^2 - AA'')] = 0;$$

et, si l'on appelle Δ l'*invariant*

$$AA'A'' - AB^2 - A'B'^2 - A''B''^2 + 2BB'B'' \text{ (*)},$$

qui se réduit ici à

$$\frac{(B^2 - A'A'')(B'^2 - AA'')}{A''},$$

et γ la quantité

$$\frac{(B^2 - A'A'')(A''C - B'C'')}{A''},$$

on trouve pour $\frac{r-t}{s}$ l'expression fort simple

$$\frac{(x^2 - y^2)\Delta - 2\gamma x}{xy\Delta - \gamma y}.$$

Si $\Delta = 0$, la surface donnée étant un paraboloïde, γ ne peut être nul, et l'équation différentielle (1) se réduit à

$$\frac{dy^2}{dx^2} + 2\frac{x}{y}\frac{dy}{dx} - 1 = 0;$$

(*) Voir *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. IX, p. 119.

elle peut s'écrire

$$\frac{\frac{1}{2}d(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}=dx,$$

et donne un système de paraboles

$$y^2=2Px+P^2,$$

toutes homofocales à celle du contour apparent, et qui sont à elles-mêmes leurs trajectoires orthogonales, lorsqu'on donne au paramètre des valeurs de signes contraires.

Si Δ n'est pas nul, nous pouvons appeler c l'excentricité $\frac{\gamma}{\Delta}$ de la conique du contour apparent, et l'équation à intégrer devient

$$\left[\frac{dy}{d(x-c)}\right]^2+\frac{(x-c)^2+y^2-c^2}{(x-c)y}\frac{dy}{d(x-c)}-1=0.$$

On y reconnaît immédiatement l'équation des trajectoires orthogonales d'un système de coniques homofocales à celle du contour apparent,

$$\frac{(x-c)^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\rho^2-c^2}=1.$$

On sait que ces trajectoires sont elles-mêmes les coniques homofocales aux premières et d'espèce différente représentées par l'équation

$$\frac{(x-c)^2}{\rho^2}-\frac{y^2}{c^2-\rho^2}=1.$$

Dans le cas des surfaces coniques, $c=0$, et le réseau orthogonal se réduit à un système de cercles concentriques et de droites passant par le centre commun, qui est la projection du sommet du cône : résultat facile à prévoir *a priori*, puisque, dans toute surface développable,

la caractéristique rectiligne en un point est la conjuguée de toute tangente à une courbe quelconque tracée sur la surface par ce point (*).

Mais tous les calculs qui précèdent deviennent illusoires si $A'' = 0$, c'est-à-dire si la surface donnée admet une direction asymptotique perpendiculaire au plan donné; le contour apparent se réduit alors à deux points réels ou imaginaires situés sur une droite toujours réelle que l'on peut prendre pour l'un des axes coordonnés si elle est située à une distance finie, c'est-à-dire si B et B' ne sont pas nuls en même temps : on retrouve alors les mêmes systèmes orthogonaux que dans les cas précédents, ellipses et hyperboles homofocales si Δ n'est pas nul, paraboles homofocales si Δ est nul.

Si B et B' sont nuls en même temps que A'', le réseau se réduit à deux systèmes orthogonaux de droites parallèles, sauf le cas où la surface serait un paraboloïde de révolution autour de l'axe des z, car alors $B'' = 0$, $A = A'$ et le réseau conjugué sur la surface se confond avec le système orthogonal des parallèles et des méridiens ou des lignes de courbures, et se projette sur le plan donné suivant un système de cercles concentriques et de droites passant par le centre commun.

Il ne reste plus, pour compléter la question, qu'à examiner le cas d'une surface cylindrique. Si nous prenons le plan des zx parallèle à la direction des génératrices, nous trouvons $r = 0$, $s = 0$ et le réseau se réduit en projection à un double système orthogonal de droites parallèles; résultat facile à prévoir sans calculs, car, d'après la définition même des tangentes conjuguées (**), la tangente à une courbe quelconque tracée par un point

(*) Voir J.-A. Serret, *Cours de Calcul différentiel et intégral*, § 677.
(**) Voir J.-A. Serret, *Cours de Calcul différentiel et intégral*, § 317.

de la surface du cylindre a toujours pour conjuguée la génératrice qui passe en ce point : les génératrices forment donc, sur la surface, l'un des systèmes du réseau conjugué; l'autre sera formé par les sections planes perpendiculaires à la projection de ces génératrices sur le plan donné.

Si le cylindre est perpendiculaire au plan donné, le réseau conjugué se confond à la limite avec le système orthogonal des génératrices et des sections droites; mais il n'y a plus alors, à proprement parler, de réseau en projection.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc, professeur au lycée du Havre.

Question 976

(voir 2e série, t. VIII, p. 563);

PAR M. O. CALLANDREAU.

Étant donnés sur un plan deux cercles et un point, mener par le point une sécante telle, que ses parties intérieures aux deux cercles soient entre elles dans un rapport donné. (Construction géométrique de la sécante.)

Soit O le point donné; soient C, C′ les centres des deux cercles donnés; soit enfin ABDE la sécante menée aux deux cercles par O : AB est la partie de la sécante intérieure à la circonférence C, DE la partie intérieure à la circonférence C′. On doit avoir, d'après l'énoncé, en supposant le problème résolu,

$$\frac{AB}{DE}=\frac{m}{n}.$$

Soient R et h le rayon de C et la perpendiculaire abaissée de C sur la sécante, R′ et h' le rayon de C′ et la perpendiculaire abaissée de C′ sur la sécante, on doit

aussi avoir

$$\frac{R^2 - h^2}{R'^2 - h'^2} = \frac{m^2}{n^2},$$

$$n^2h^2 - m^2h'^2 = n^2R^2 - m^2R'^2.$$

Désignons, pour abréger, $n^2R^2 - m^2R'^2$ par K^2,

$$n^2h^2 - m^2h'^2 = K^2,$$

$$(nh + mh')(nh - mh') = K^2.$$

Si, à partir de C, dans un sens contraire à CO, on porte $(n - 1)$ fois CO, la perpendiculaire abaissée de l'extrémité de cette ligne sur ABDE sera égale à nh; de même, si l'on porte, à partir de C', dans un sens contraire à C'O, $(m - 1)$ fois la longueur C'O, la perpendiculaire abaissée de l'extrémité de cette ligne sur la sécante sera égale à mh'. Cela aura lieu quelle que soit la position de la sécante.

Comme les extrémités des lignes peuvent être déterminées par les données. on voit que le problème est ramené au suivant :

Par un point donné O, mener une sécante telle, que le produit de la somme par la différence des perpendiculaires h_1, h_2, abaissées de points donnés O_1, O_2 sur la sécante, soit égal à une quantité donnée.

Ce problème, si je ne me trompe, a déjà été résolu par Lamé dans son ouvrage : *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie.* Ainsi le problème proposé serait à la rigueur résolu; mais, pour compléter la démonstration, je vais reproduire à peu près la solution que Lamé donne du problème auquel j'ai ramené le proposé.

Si, à partir de O_1 et dans le sens de OO_2, on mène une longueur O_1O_3 égale à OO_2, la perpendiculaire abaissée de O_3 sur la sécante représentera $h_1 + h_2$ si les perpen-

diculaires sont d'un même côté de la sécante, $h_1 - h_2$ si elles sont de côtés différents.

Si, à partir de O_1 et dans un sens contraire à OO_2, on porte une longueur O_1O_4 égale à OO_2, la perpendiculaire abaissée de O_4 sur la sécante représentera $h_1 - h_2$ ou $h_1 + h_2$, suivant que les perpendiculaires seront ou ne seront pas d'un même côté de la sécante.

Mais, dans tous les cas, le produit des perpendiculaires abaissées de O_3 et de O_4 (points déterminés) sur la sécante est égal à $(h_1 - h_2)(h_1 + h_2)$ ou à K^2.

On pourrait répéter le même raisonnement en prenant pour point de départ O_2.

La question est donc de résoudre ce nouveau problème :

Par un point donné O, *mener une sécante telle, que le produit des perpendiculaires abaissées sur elles de deux points donnés* O_3, O_4 *soit égale à une quantité donnée* K^2.

Or ce problème, comme il est facile de le voir, revient à mener par le point O des tangentes à l'ellipse ayant pour foyers O_3, O_4, et pour petit axe K.

Ce problème étant un de ceux qu'on sait résoudre, le problème primitif est résolu.

Il admet deux solutions ou n'en admet aucune, suivant que le point O est extérieur ou intérieur à l'ellipse.

Dans le cas très-particulier où le point O serait sur l'ellipse, il n'y aurait qu'une solution.

Sur la question 990

(voir même tome, p. 86);

PAR M. H. D'OVIDIO,
Professeur à Naples.

Dans une Note publiée dans le *Giornale di Matematiche* de Naples (*), j'ai donné des formules qui permet-

(*) Vol. VIII, p. 241, *Nota su' punti, piani e rette in coordinate omogenee.*

tent de démontrer et même de généraliser la question 990.

Soient $A_1, \ldots, A_4$ *les sommets d'un tétraèdre;* $a_1, \ldots, a_4$ *les faces;* V *le volume;* $x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_4}$ *les distances d'un point arbitraire* A_α *aux faces;* $D_{\alpha\beta}$ (*ou* $D_{\beta\alpha}$) *la direction positive de la droite qui joint les points* A_α, A_β; $\delta_{\alpha\beta}(=-\delta_{\beta\alpha})$ *la distance des points* A_α, A_β. *La question peut alors s'exprimer par l'équation*

$$(1) \qquad \sum_{rs} x_{\alpha r} x_{\alpha s} a_r a_s \delta_{\alpha r} \delta_{\alpha s} \cos(D_{\alpha r}, D_{\alpha s}) = 0,$$

rs désignant un arrangement binaire des indices 1, 2, 3, 4, *et la somme s'étendant à tous les arrangements avec répétition.*

Mais on a, plus généralement, pour deux points A_α, A_β :

$$(2) \qquad \sum_{rs} x_{\alpha r} x_{\beta s} a_r a_s \delta_{\alpha r} \delta_{\beta s} \cos(D_{\alpha r}, D_{\beta s}) = 0,$$

c'est-à-dire

$$(2\ bis) \qquad \sum_{rs} \overline{A_\alpha A_r}\,\overline{A_\beta A_s} \cos(\overline{A_\alpha A_r}, \overline{A_\beta A_s}) V_{\alpha r} V_{\beta s} = 0,$$

appelant $V_{\alpha_1}, \ldots$ les volumes des tétraèdres $A_\alpha A_2 A_3 A_4, \ldots$, avec des signes convenables.

Pour démontrer l'équation (2), je supposerai connue la relation suivante (*) :

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} & 81 V^4 \delta_{\alpha\beta} \delta_{\lambda\mu} \cos(D_{\alpha\beta}, D_{\lambda\mu}) \\ & = \sum_{ik,\,mn} x_{\alpha i} x_{\beta k} x_{\lambda m} x_{\mu n} a_i a_k a_m a_n \delta_{ik} \delta_{mn} \cos(D_{ik}, D_{mn}), \end{aligned} \right.$$

où *ik*, *mn* sont deux arrangements binaires, égaux ou

(*) *Loco citato*, équation (164).

différents, des indices 1, 2, 3, 4. Si l'on change β, λ, μ en r, β, s, et si l'on remarque que

$$a_k x_{rk} = \frac{3\mathrm{V} \text{ pour } k = r}{\text{o pour } k \gtrless r}, \quad a_n x_{sn} = \frac{3\mathrm{V} \text{ pour } n = s}{\text{o pour } n \gtrless s},$$

cette relation devient

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} & 9\mathrm{V}^2 \delta_{\alpha r} \delta_{\beta s} \cos(\mathrm{D}_{\alpha r}, \mathrm{D}_{\beta s}) \\ & = \sum_{im} x_{\alpha i} x_{\beta m} a_i a_m \delta_{ir} \delta_{ms} \cos(\mathrm{D}_{ir}, \mathrm{D}_{ms}). \end{aligned} \right.$$

Et si l'on substitue la valeur de $\delta_{\alpha r} \delta_{\beta s} \cos(\mathrm{D}_{\alpha r}, \mathrm{D}_{\beta s})$, donnée par l'équation (4), dans la somme (2), celle-ci se réduit à

$$\frac{1}{9\mathrm{V}^2} \sum_{ir,ms} x_{\alpha i} x_{\alpha r} x_{\beta m} x_{\beta s} a_i a_r a_m a_s \delta_{ir} \delta_{ms} \cos(\mathrm{D}_{ir}, \mathrm{D}_{ms}).$$

Or, d'après l'équation (3), cette expression équivaut à

$$9\mathrm{V}^2 \delta_{\alpha\alpha} \delta_{\beta\beta} \cos(\mathrm{D}_{\alpha\alpha}, \mathrm{D}_{\beta\beta}),$$

qui est nulle, car $\delta_{\alpha\alpha} = \delta_{\beta\beta} = 0$. Ainsi l'équation (2) est démontrée.

Voici une autre relation, qui a de l'analogie avec la relation (2). En désignant par $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_4$ les plans des faces $a_1, \ldots, a_4$; par X_α, X_β deux plans quelconques; par $\mathrm{D}_{\alpha\beta}, \mathrm{D}_{\alpha 1}, \ldots$ les droites $\mathrm{X}_\alpha \mathrm{X}_\beta, \mathrm{X}_\alpha \mathrm{X}_1, \ldots$; par $\xi_{\alpha 1}, \ldots$ les distances des sommets $\mathrm{A}_1, \ldots$ au plan X_α, etc.; on a

$$(5) \quad \sum_{rs} \xi_{\alpha r} \xi_{\beta s} a_r a_s \sin(\mathrm{X}_\alpha, \mathrm{X}_r) \sin(\mathrm{X}_\beta, \mathrm{X}_s) \cos(\mathrm{D}_{\alpha r}, \mathrm{D}_{\beta s}) = 0.$$

On déduit cette nouvelle équation de la suivante (*) :

$$\begin{aligned} & 81\mathrm{V}^4 \sin(\mathrm{X}_\alpha, \mathrm{X}_\beta) \sin(\mathrm{X}_\lambda, \mathrm{X}_\mu) \cos(\mathrm{D}_{\alpha\beta}, \mathrm{D}_{\lambda\mu}) \\ & = \sum_{ik,mn} \xi_{\alpha i} \xi_{\beta k} \xi_{\lambda m} \xi_{\mu n} a_i a_k a_m a_n \sin(\mathrm{X}_i, \mathrm{X}_k) \sin(\mathrm{X}_m, \mathrm{X}_n) \cos(\mathrm{D}_{ik}, \mathrm{D}_{mn}). \end{aligned}$$

(*) *Loco citato*, équation (165).

On peut établir l'équation (2 *bis*) d'une autre manière. Si $P_1, \ldots, P_n$ désignent des forces appliquées à un point O, R leur résultante, $P'_1, \ldots, P'_n$ des forces appliquées à un autre point O', et R' leur résultante, on a

$$(6) \qquad \sum_{rs} P_r P'_s \cos(P_r, P'_s) = RR' \cos(R, R'),$$

rs étant un arrangement binaire des indices 1, 2,..., *n*.

Or si l'on pose, en conservant la notation employée par M. Padova,

$$P_1 = OA_1 \frac{x_1}{x'}, \ldots, \quad P_4 = OA_4 \frac{t_1}{t'}, \quad V_1 = \text{tétr.}\, OA_2 A_3 A_4, \ldots,$$

$$P'_1 = O'A_1 \frac{x_2}{x'}, \ldots, \quad P'_4 = O'A_4 \frac{t_2}{t'}, \quad V'_1 = \text{tétr.}\, O'A_2 A_3 A_4, \ldots,$$

on aura, comme il a été démontré par M. Padova,

$$R = 0, \quad R' = 0;$$

par conséquent la relation (6) deviendra

$$\sum_{rs} \overline{OA_r}\, \overline{O'A_s} \cos(\overline{OA_r}, \overline{O'A_s})\, V_r V'_s = 0,$$

qui équivaut à l'équation (2 *bis*).

Un procédé semblable nous conduit à une nouvelle démonstration de l'équation (5).

Remarquons d'abord que la formule (6) subsiste pour des systèmes de forces agissant dans un même plan, mais non appliquées à un même point. Or si, suivant les droites $D_{\alpha_1}, \ldots, D_{\alpha_4}$, on fait agir des forces proportionnelles aux produits

$$(7) \qquad a_1 \xi_{\alpha_1} \sin(X_\alpha, X_1), \ldots, \quad a_4 \xi_{\alpha_4} \sin(X_\alpha, X_4),$$

on trouve aisément que la somme des moments de

ces forces par rapport au pied de la perpendiculaire $\xi_{\alpha i}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) est $\sum_r a_r \xi_{\alpha r} x_r^{(i)}$, $x_r^{(i)}$ indiquant la distance de ce pied au plan X_r. Et comme on sait que cette somme est nulle, on conclut que les forces (7) se font équilibre.

Cela posé, si l'on applique l'équation (6) au système (7) et au système

$$a_1 \xi_{\beta_1} \sin(X_\beta, X_1), \ldots, \quad a_4 \xi_{\beta_4} \sin(X_\beta, X_4),$$

qui est aussi en équilibre, on retombe sur l'équation (5).

Question 1023

(voir 2e série, t. X, p. 192);

PAR M. GAMBEY,

Professeur au lycée de Saint-Étienne.

Le triangle ABC *et le triangle* A′B′C′, *formé en joignant les pieds des hauteurs de* ABC, *ont leur axe d'homologie perpendiculaire à la ligne qui joint le point de concours des hauteurs au centre du cercle circonscrit.* (LEMOINE.)

Soient α, β, γ les points de concours des côtés (BC, B′C′), (CA, C′A′), (AB, A′B′),

I le centre d'homologie,

M, N, P les milieux des côtés BC, CA et AB;

on sait que les trois points α, β, γ sont situés sur l'axe d'homologie des triangles ABC, A′B′C.

Pour démontrer la proposition, il suffit de faire voir que la droite $\alpha\beta\gamma$ est l'axe radical des circonférences circonscrites aux deux triangles, car on sait que le cercle circonscrit à A′B′C′ (cercle des neuf points) a son centre au milieu de OI.

Considérons le point α par exemple. Je dis que

$$\alpha B . \alpha C = \alpha M . \alpha A'.$$

En effet, le faisceau (C', $BA'C\alpha$) étant harmonique, on a, abstraction faite du signe des segments,

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{\alpha B}{\alpha C}; \quad \text{d'où} \quad A'B . \alpha C = A'C . \alpha B;$$

mais

$$A'B = \alpha B - \alpha A' \quad \text{et} \quad A'C = \alpha A' - \alpha C;$$

donc, en substituant, effectuant les calculs et transposant,

$$2 \alpha B . \alpha C = (\alpha B + \alpha C) . \alpha A',$$

puis

$$\alpha B . \alpha C = \frac{(\alpha B + \alpha C)}{2} . \alpha A' = \alpha M . \alpha A'.$$

Le point α est donc d'égale puissance par rapport aux deux cercles.

On répéterait la même démonstration pour le point β, par exemple.

Donc $\alpha\beta\gamma$ est l'axe radical des deux cercles.

C. Q. F. D.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc, professeur au lycée du Havre; A. Pellissier, capitaine d'artillerie à Douai; O. Callandreau, candidat à l'École Polytechnique; et H. Lez, à Lorrez.

CORRESPONDANCE.

1. Nous avons reçu les ouvrages suivants, dont nous rendrons compte dans un prochain numéro :

Cours d'Analyse infinitésimale, par M. Ph. Gilbert, de Louvain.

Traité élémentaire de calcul différentiel, contenant la théorie des courbes planes avec de nombreux exemples, par M. BENJAMIN WILLIAMSON, de Trinity College Dublin.

Questions de trigonométrie, méthodes et solutions, avec plus de 400 *exercices proposés, à l'usage des candidats aux Écoles et de MM. les officiers de l'armée et de la marine*, par M. A. DESBOVES, agrégé et docteur ès sciences, professeur au lycée Condorcet.

2. C'est par méprise qu'on a inséré comme énoncé de la question 1066, et avec des restrictions inutiles, un lemme incident qui n'avait pour but que la démonstration d'une proposition sur les nombres entiers. Cette proposition nous avait été communiquée par M. Realis dans les termes suivants :

« Quelque valeur entière que l'on donne à a, l'expression

$$\frac{a(a+1)(2a+1)(3a^2+3a+1)^m}{2.3^m},$$

dans laquelle m est un entier positif, ne peut devenir la $(2m+3)^{\text{ième}}$ puissance d'un nombre entier.

» On excepte, bien entendu, les valeurs $a=0$, et $a=-1$, qui annulent l'expression considérée. »

3. M. Gambey, professeur au lycée de Saint-Étienne, et M. A. Pellissier, capitaine d'artillerie à Douai, nous font observer que la question 1068 est résolue p. 163, 165 et 188 du *Traité de Géométrie analytique* de G. SALMON (édition française), ce qui nous dispense d'en insérer la solution.

QUESTIONS.

1074. Étant donné un polygone plan et convexe dont deux côtés consécutifs quelconques font un angle constant, on sait que le lieu du point tel qu'en projetant ce point sur les côtés du polygone et joignant les projections consécutives par des droites, on forme un polygone d'une aire donnée, est une circonférence. Quand la valeur de l'aire varie, on obtient diverses circonférences qui ont toutes même centre O. Démontrer que ce point O est le centre des moyennes distances des sommets du polygone primitif, ou, plus généralement, des points qu'on obtient en prenant les centres de tous les couples de deux côtés séparés par un même nombre k de côtés; ce point O est aussi le centre des moyennes distances de ses projections sur les côtés du polygone. Voir ce que deviennent ces théorèmes quand ces côtés deviennent infiniment petits, et que le polygone se transforme en une courbe plane et convexe. On retrouvera en particulier une proposition bien connue de Steiner, relative au centre de gravité de masses appliquées aux différents arcs infiniment petits égaux de la courbe, et inversement proportionnelles aux rayons de courbure correspondants. (F. Didon.)

1075. Le nombre des nombres premiers compris entre un nombre entier positif A et son double est moindre que celui des nombres premiers non supérieurs à A.

(Lionnet.)

1076. Étant donnés une droite et un point, on mène par le point deux cercles tangents à la droite et se coupant sous un angle donné, puis la seconde tangente commune à ces deux cercles. Le lieu du point symétrique

du point donné par rapport à cette tangente décrit un limaçon de Pascal, qui a pour l'un de ses foyers le point donné. L'autre foyer est le point symétrique donné par rapport à la droite donnée. (H. FAURE.)

1077. Appelant projections d'un point sur une courbe les pieds des normales abaissées de ce point sur la courbe, on demande :

1° Quel est le lieu des projections d'un même point sur toutes les droites qui passent par *un* point donné ?

2° Quel est le lieu des projections d'un même point sur toutes les circonférences qui passent par *deux* points donnés ?

3° Quel est le lieu des projections d'un même point sur toutes les paraboles qui passent par *trois* points donnés ?

4° Quel est le lieu des projections d'un même point sur toutes les coniques qui passent par *quatre* points donnés ?

5° Peut-on déduire de la solution de cette dernière question les solutions des questions précédentes ?

(MANNHEIM.)

1078. On donne une courbe plane quelconque et la tangente *at* au point *a* de cette courbe. On mène la corde *bc* parallèlement à la tangente *at*. Lorsque *bc* se rapproche indéfiniment de *at*, en restant parallèle à cette droite, on demande :

1° La limite des positions de la droite *ae* qui joint le point *a* au milieu *e* de la corde *bc*. On obtient ainsi à la limite la droite que M. Transon a appelée *axe de déviation* de la courbe en *a* ;

2° La limite des positions du point de rencontre des axes de déviation de la courbe en *b* et *c* ;

3° La limite des positions des droites qu'on obtient en

joignant le point a aux points d'intersection des cercles osculateurs de la courbe donnée en b et c;

4° La limite des positions du point de rencontre de la corde commune à ces deux circonférences et de la tangente at. (MANNHEIM.)

1079. Montrer que pour toute valeur entière et positive du nombre m la suite terminée

$$\frac{2}{1}m - \frac{2}{1}\frac{2}{3}m(m-1) + \frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{2}{5}m(m-1)(m-2)$$
$$- \frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{2}{5}\frac{2}{7}m(m-1)(m-2)(m-3) + \ldots$$

a pour valeur

$$\frac{2m}{2m-1}.$$

(HATON DE LA GOUPILLIÈRE.)

1080. Montrer que pour toutes les valeurs entières et positives des deux nombres m et n la suite terminée

$$\frac{1}{m} - \frac{n}{1}\frac{1}{m+1} + \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1}{m+2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\frac{1}{m+3}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\frac{1}{m+4} - \ldots$$

a pour valeur

$$\frac{1.2.3.4\ldots(m-1)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}.$$

(HATON DE LA GOUPILLIÈRE.)

1081. Trouver l'enveloppe de la corde commune à une ellipse et à son cercle osculateur; trouver le lieu des milieux de ces cordes (*). (E. LEMOINE.)

(*) La recherche de l'enveloppe de la corde commune à une parabole et à son cercle osculateur fait l'objet de la question 644, t. II, 2e série; elle est résolue page 416. C'est une parabole.

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE SUR LE MOUVEMENT D'UNE SPHÈRE PESANTE GLISSANT SUR UN PLAN HORIZONTAL;

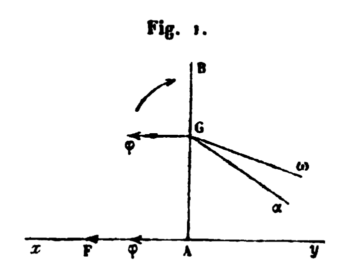
PAR M. H. RESAL.

Il m'a paru intéressant de chercher à arriver géométriquement aux curieuses propriétés, toutes géométriques d'ailleurs, du mouvement d'une bille qui glisse sur un plan horizontal, propriétés auxquelles Coriolis est arrivé par une belle analyse, peut-être un peu difficile à suivre à cause du grand nombre de notations qu'elle comporte.

J'ai été conduit à un certain nombre de théorèmes qui avaient échappé aux investigations de Coriolis.

Je suppose que la sphère soit composée de couches concentriques homogènes, et je néglige le frottement de

Fig. 1.



roulement, eu égard à sa faible importance relative devant le frottement de glissement, ce qui revient à considérer la réaction normale du plan comme passant géométriquement par le point d'appui.

Soient (*fig.* 1) :

G le centre de figure de la sphère, qui est en même temps son centre de gravité;

A son point de contact avec le plan horizontal xy;
M sa masse;
R son rayon;
K^2MR^2 son moment d'inertie par rapport à un diamètre quelconque, K^2 étant égal à $\frac{2}{5}$ si la sphère est homogène;
F le frottement de glissement;
$G\omega$, $G\alpha$ les axes respectifs de la rotation instantanée ω et de l'accélération angulaire α : nous supposerons que le sens positif pour ω et α est celui pour lequel ces deux rotations ont lieu de la droite vers la gauche pour l'observateur couché suivant ωG et αG, en ayant les pieds en G;
φ l'accélération de G parallèle à F et de même sens.

D'après un principe connu, on a

$$(1) \qquad F = M\varphi.$$

La force d'inertie d'un point quelconque m de M dans son mouvement autour de G considéré comme fixe est, comme on le sait, la résultante des forces semblables dues à l'accélération angulaire α et à la force centrifuge de m, résultant de la rotation ω autour de $G\omega$.

Les forces centrifuges s'entre-détruisant, et n'ayant ainsi aucune influence sur le mouvement de M autour de G, il est permis d'en faire abstraction. Les forces d'inertie dues à l'accélération angulaire ont pour moment $-K^2MR^2\alpha$, dont l'axe est $G\alpha$, et qui, ajouté géométriquement à celui de F, doit donner un résultat nul, ce qui exige que

$$-K^2MR^2\alpha + FR = 0,$$

ou

$$(2) \qquad K^2MR\alpha = F,$$

et ce qui exprime que :

1° *L'axe de l'accélération angulaire est perpendiculaire au plan* GAF ;

Et comme conséquence que :

2° *La composante de la rotation instantanée autour de la verticale est constante.*

Cette composante ne jouant aucun rôle au point de vue du glissement, et même sous celui du roulement, nous pouvons en faire abstraction et supposer horizontale la droite $G\omega$.

Les équations (1) et (2) donnent, par l'élimination de F,

$$(3) \qquad -K^2R\alpha + \varphi = 0.$$

Portons verticalement au-dessus de G la longueur $GB = K^2R$, et considérons le point B comme appartenant à la verticale du centre de gravité au mouvement duquel il participe. Le point B suivra une courbe (B) identique à la trajectoire de G, mais comprise dans un autre plan horizontal.

Dans le mouvement de la sphère, l'accélération de celui *m* de ses points qui se trouve en B se compose de l'accélération horizontale $\varphi - \alpha GB$, qui est nulle d'après l'équation (3), et de l'accélération verticale $\omega^2 GB$. Or la première de ces accélérations est la résultante de l'accélération tangentielle et de la composante horizontale de l'accélération centripète de *m* sur sa trajectoire ; et comme ces deux composantes sont rectangulaires, il faut que chacune d'elles soit nulle. Il suit de là que, en projection horizontale :

3° *Le point m décrit sur sa trajectoire deux chemins élémentaires égaux dans deux éléments égaux et successifs du temps, et qui sont en ligne droite, ce qui exige qu'en* B *la trajectoire présente en général un*

point d'inflexion, et que la vitesse atteigne un maximum ou un minimum;

4° *Le plan osculateur de cette trajectoire en* B *est vertical, et l'accélération centripète correspondante a pour expression*

$$\omega^2 GB = \omega^2 K^2 R.$$

Soient (*fig.* 2) :

$m'B$, Bm''' les deux éléments consécutifs décrits par m avant d'avoir atteint le point d'inflexion B et au delà de ce point;

B' la position de B au bout du temps dt;

m_1 le point qui passe par B' quand m est en m''';

m'_1, m''_1 les positions de ce point contemporaines de celles m', B de m;

n'_1, n''_1 les projections de m'_1 et m''_1 sur la tangente en B' à la trajectoire de m_1.

Fig. 2.

Comme la distance mm_1 reste invariable, on a, aux termes près du troisième ordre que nous négligerons,

$$m'm'_1 = Bm''_1 = m'''B' = m'n'_1 = Bn''_1,$$

et

$$B'm''_1 = B'n''_1 = m'_1 m''_1 = n'_1 n''_1.$$

La vitesse de m_1 en B', étant maximum ou minimum, ne diffère de celle qu'il possède en m'_1 et m''_1 que des

termes du second ordre; nous avons donc $n''_1 n'_1 = n''_1 B'$, aux termes près du troisième ordre. Il résulte de là que $B'm'''$, Bn''_1, $m'n'_1$ sont parallèles; qu'il en est de même de $m'''m'$ et $B'n'_1$, et enfin que $B'm''_1 = Bm'''$.

Donc :

5° *Les points décrivants de la courbe* (B), *considérés comme appartenant à la sphère, ont une vitesse constante en grandeur et en direction, et qui ne dépend que des conditions initiales du mouvement.*

On a aussi le théorème suivant :

6° *Si l'on fait abstraction de la composante centripète autour de* $G\omega$, *l'accélération d'un point quelconque est celle qui résulte de l'accélération angulaire transportée en* B *autour d'un axe* $B\alpha'$ *parallèle à* $G\alpha$. Ce théorème n'est qu'une conséquence immédiate de la composition de φ et α, considérés respectivement comme une translation et une rotation.

On déduit de là (*fig.* 1), en ayant égard à l'équation (3), que :

7° *La composante horizontale* Ψ *de l'accélération du point de contact* A *a pour expression*

$$\Psi = \alpha BA = \varphi\left(1 + \frac{1}{K^2}\right), \tag{4}$$

et qu'elle est dirigée dans le sens de la force F.

Les propriétés ci-dessus énoncées du mouvement de la sphère sont complétement indépendantes de la nature de la force F.

Avant de supposer que cette force est proportionnelle au poids du corps ou qu'elle est constante, nous établirons le théorème suivant, qui paraît presque évident, et

qui peut permettre de simplifier certains problèmes relatifs au glissement d'un corps sur un plan :

8° *Si un solide terminé par une surface continue se meut de telle manière qu'une série d'éléments consécutifs de cette surface glissent successivement sur un plan, la vitesse de glissement w sera à chaque instant égale et parallèle à la vitesse d'un point géométrique q se mouvant en vertu de la vitesse initiale de glissement w_0 et de l'accélération du point de contact estimée dans le plan.*

Considérons, en effet, deux éléments consécutifs μ, μ' de la surface du corps qui viennent successivement se mettre en contact avec le plan, et soit (a) leur arête commune. La vitesse w' de chacun des points de (a) au bout du temps dt sera, en employant une notation connue (*),

$$\overline{w'} = \overline{w} + \overline{\Psi\, dt},$$

puisque les points appartiennent à μ. Mais les mêmes points de l'arête (a) doivent alors avoir la même vitesse translatoire que l'élément μ' auquel elle appartient : donc il suit que w' devient la vitesse de glissement de μ', et ainsi de suite.

Ainsi la variation géométrique de la vitesse de glissement au bout du temps dt est la même en grandeur et en direction que celle d'un point fictif q, animé primitivement de la vitesse w_0, et dont l'accélération serait constamment Ψ, ce qu'il fallait établir.

Corollaires. — Désignant par (q) la trajectoire du point q, on reconnaît sans peine que :

(*) *Voir* mon *Traité de Cinématique pure* pour ce qui est relatif aux sommes géométriques.

9° *La courbe (q) sera une parabole du second degré si l'accélération du point de contact est constante en grandeur et en direction ;*

10° *Le lieu (q) sera une droite si la direction de l'accélération Ψ coïncide à chaque instant avec celle de la vitesse de glissement. Dans le cas où l'accélération Ψ est constante, la vitesse de glissement suit la loi du mouvement uniformément varié.*

Revenons au cas de la sphère, et appelons f le coefficient de frottement de glissement, et g l'accélération de la pesanteur; nous aurons, puisque l'inertie n'influe en aucune façon sur la pression exercée sur le plan,

$$F = Mgf;$$

d'où

$$\Psi = \varphi\left(1 + \frac{1}{K^2}\right) = \frac{F}{M}\left(1 + \frac{1}{K^2}\right) = fg\left(1 + \frac{1}{K^2}\right).$$

Mais la force F, et par suite l'accélération Ψ, est dirigée en sens inverse de la vitesse de glissement w, ce qui prouve que (q) est une ligne droite et que la direction de w ou de F est constante (10°). Donc :

11° *Le frottement de glissement reste parallèle à une direction constante qui ne dépend que des conditions initiales du mouvement ;*

12° *La vitesse de glissement suit la loi du mouvement uniformément retardé, et est représentée par la formule*

$$(5) \qquad w = w_0 - fg\left(1 + \frac{1}{K^2}\right)t,$$

w_0 *étant sa valeur initiale ;*

13° *Le temps t' au bout duquel cette vitesse est nulle,*

qui définit l'époque à laquelle commence le roulement, est donné par l'équation

$$(6)\qquad t' = \frac{w_0}{fg\left(1+\frac{1}{K^2}\right)}\ (*);$$

14° *Pendant le glissement, le centre de la sphère, par suite le point de contact géométrique, décrit une parabole du second degré* [théorème de J.-A. Euler (**)], ce qui n'est qu'une conséquence de ce que l'accélération Ψ est constante en grandeur et en direction.

Équation de la trajectoire parabolique. — Soient u_0 la vitesse constante en grandeur et en direction des points de la sphère qui se succèdent en B; v la vitesse du centre de gravité G. Nous allons chercher à exprimer v en fonction de u_0 et w.

Nous avons

$$(7)\qquad \begin{cases} \bar{u}_0 = \bar{v} + \bar{\omega}\,\overline{GB} = \bar{v} + \bar{\omega}K^2R, \\ \bar{w} = \bar{v} - \omega\,\overline{GA} = \bar{v} - \omega\bar{R}; \end{cases}$$

d'où, en multipliant la seconde équation par K^2 et l'ajoutant à la première,

$$(8)\qquad \bar{v} = \frac{\bar{u}_0 + K^2\bar{w}}{1+K^2}.$$

Soient maintenant A_0 la projection horizontale de la position initiale de G; A_0x, A_0y les parallèles aux directions de u_0 et w_0, v_0 la valeur initiale de v. Nous avons

(*) En supposant $K^2 = \frac{2}{5}$, on tombe sur un résultat obtenu par Coriolis par une méthode indiquée plus loin.

(**) Jean-Albert Euler, fils du célèbre Léonard Euler, né à Saint-Pétersbourg en 1734, mort en 1800. Il entra à l'Académie de Berlin à l'âge de vingt ans, fut professeur de physique à Saint-Pétersbourg et secrétaire de l'Académie des Sciences de cette ville. Ses principaux Mémoires ont été publiés dans les Recueils de Berlin, de Munich et de Göttingue.

vu plus haut que φ est constamment dirigée en sens inverse de A_0y.

Les composantes de v_0 suivant A_0x et A_0y étant, d'après la formule (8),

$$\frac{u_0}{1+K^2}, \quad \frac{K^2w_0}{1+K^2},$$

on a, en appelant x, y les coordonnées de la projection horizontale A de G au bout du temps t,

$$(9) \quad x=\frac{u_0}{1+K^2}t, \quad y=\frac{K^2w_0}{1+K^2}t-\frac{\varphi t^2}{2}=\frac{K^2w_0t}{1+K^2}-fg\frac{t^2}{2};$$

d'où, par l'élimination de t, pour l'équation de la trajectoire de A,

$$(10) \qquad y=\frac{K^2w_0x}{u_0}-fg\frac{(1+K^2)}{2}\frac{x^2}{u_0^2}.$$

Des équations (8) et (9) on peut déduire facilement la valeur t' du temps au bout duquel le glissement cesse; car la première de ces équations donne, en supposant $w=0$,

$$v=\frac{u_0}{1+K^2},$$

ce qui exprime que v devient parallèle à A_0x, ou que $\frac{dy}{dx}=0$. La seconde des équations (9) donne, par suite,

$$\frac{K^2w_0}{1+K^2}=fgt';$$

d'où

$$t'=\frac{w_0}{fg\left(1+\frac{1}{K^2}\right)},$$

et l'on retombe ainsi sur la formule (6), que nous avons établie d'une autre manière.

Les coordonnées de l'extrémité de la trajectoire parabolique ou correspondant à la valeur ci-dessus du temps sont

$$x' = \frac{K^2 u_0 w_0}{(1+K^2)^2 fg}, \quad y' = \frac{K^4}{f(1+K^2)^2} \frac{w_0^2}{2g}.$$

Le rayon de courbure ρ en B de la trajectoire du point de la sphère qui passe par ce point au bout du temps t peut facilement se construire. Nous avons, en effet, d'après le théorème (4),

$$\frac{u_0^2}{\rho} = \omega^2 K^2 R.$$

Mais de la première équation (7) on tire

$$\omega^2 K^2 R = u_0 - \frac{dx}{dt} = \frac{K^2}{1+K^2} u_0;$$

d'où

$$\rho = \left(1 + \frac{1}{K^2}\right) u_0.$$

Ce rayon est donc constant.

ÉTUDE D'UN COMPLEXE DU SECOND ORDRE

(suite, voir même tome, p. 97);

PAR M. PAINVIN.

---

§ II.

15. Si, dans l'équation (3), n° 3, on regarde u_1, v_1, w_1 comme des coordonnées variables et qu'on supprime les indices, on a l'équation suivante :

$$(\text{r}) \quad (34) \left\{ \begin{array}{l} A(w_0 v - v_0 w)^2 + B(u_0 w - w_0 u)^2 + C(v_0 u - u_0 v)^2 \\ \qquad - (u - u_0)^2 - (v - v_0)^2 - (w - w_0)^2 = 0, \end{array} \right.$$

laquelle représente une conique, enveloppe des droites du complexe situées dans le plan $\Pi(u_0, v_0, w_0)$; nous dirons que c'est une *conique du complexe*, et nous la désignerons par Γ.

Cette équation développée peut s'écrire

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} &u^2(Cv_0^2 + Bw_0^2 - 1) + v^2(Aw_0^2 + Cu_0^2 - 1) \\ &\quad + w^2(Bu_0^2 + Av_0^2 - 1) - 2Av_0w_0vw \\ &\quad - 2Bw_0u_0wu - 2Cu_0v_0uv + 2u_0u \\ &\quad + 2v_0v + 2w_0w - (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2) = 0. \end{aligned}\right.$$

Le centre de cette conique, ou le pôle du plan de l'infini, a pour équation

$$(36)\qquad u_0u + v_0v + w_0w - (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2) = 0;$$

ses coordonnées x_1, y_1, z_1 sont

$$(36\ bis)\qquad \frac{x_1}{u_0} = \frac{y_1}{v_0} = \frac{z_1}{w_0} = \frac{1}{u_0^2 + v_0^2 + w_0^2}:$$

on voit que ce sont les coordonnées du pied de la perpendiculaire abaissée du centre O de l'ellipsoïde sur le plan

$$(u_0, v_0, w_0) \quad \text{ou} \quad u_0x + v_0y + w_0z - 1 = 0.$$

Donc :

Théorème VI. — *Les droites du complexe, situées dans un plan fixe* Π, *enveloppent une conique* Γ *dont le centre est le pied de la perpendiculaire abaissée du centre* O *de l'ellipsoïde sur le plan* Π.

On voit, par l'équation (35) ou les valeurs (36 *bis*), que la conique Γ n'est jamais une parabole, tant que le plan Π n'est pas à l'infini, puisque cette conique ne peut pas être touchée par le plan de l'infini.

Quand le plan Π est à l'infini, la conique Γ devient le cercle imaginaire de l'infini.

16. L'équation tangentielle générale des surfaces homofocales de l'ellipsoïde donné est

$$(37) \qquad a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - 1 + \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = 0,$$

λ étant un paramètre arbitraire.

Si l'on exprime que la surface (37) touche le plan (u_0, v_0, w_0), on a

$$(38) \qquad \lambda_0 = -\frac{a^2u_0^2 + b^2v_0^2 + c^2w_0^2 - 1}{u_0^2 + v_0^2 + w_0^2};$$

λ_0 sera le *paramètre tangentiel* de la surface unique homofocale touchant le plan Π.

Soit J le point de contact; par le point J passent trois surfaces homofocales dont une touche le plan Π en J; une des normales, JC, à ces surfaces, sera perpendiculaire au plan Π, et les deux autres, JA et JB, seront dans ce plan. Si l'on imagine le cône du complexe ayant son sommet en J, les axes de ce cône seront les droites JA, JB, JC; le plan Π coupera le cône suivant deux génératrices tangentes à la conique Γ, dont le centre est le pied I de la perpendiculaire abaissée du centre O de l'ellipsoïde sur le plan; JA et JB seront les bissectrices de ce système de tangentes. Ajoutons de suite que JA et JB ne peuvent pas être parallèles aux axes de la conique Γ; car, s'il en était ainsi, JA, par exemple, par le centre I de la conique, et le plan AJC, qui est un des plans tangents aux surfaces homofocales passant par J, contiendrait le centre O de l'ellipsoïde, ce qui est évidemment impossible.

Le point J est le seul point du plan Π pour lequel deux des axes du cône du complexe, ayant son sommet en ce point, sont dans le plan Π lui-même; car il n'y a qu'une seule surface homofocale touchant le plan Π.

On peut se proposer de chercher quels sont les points d'un plan Π donné pour lesquels un des axes du cône du

complexe correspondant à ces points se trouve dans le plan Π. Le lieu est une courbe du 3[e] ordre.

17. L'équation (35) de la conique peut s'écrire

$$(39)\quad \begin{cases} (u_0^2+v_0^2+w_0^2)(a^2u^2+b^2v^2+c^2w^2-1) \\ \quad +(a^2u_0^2+b^2v_0^2+c^2w_0^2-1)(u^2+v^2+w^2) \\ \quad -2(u_0u+v_0v+w_0w)(a^2u_0u+b^2v_0v+c^2w_0w-1)=0. \end{cases}$$

Or les deux premiers groupes de termes de cette équation donnent, en égalant l'ensemble à zéro, une surface homofocale dont le *paramètre tangentiel* est égal et de signe contraire à celui de la surface homofocale touchant le plan donné; d'ailleurs

$$a^2u_0u+b^2v_0v+c^2w_0w-1=0$$

est le pôle du plan Π par rapport à l'ellipsoïde donné; l'équation

$$u_0u+v_0v+w_0w=0$$

est celle du point à l'infini sur une perpendiculaire au plan Π. D'après cela, l'équation (39) met en évidence la proposition suivante :

Théorème VII. — *La conique* Γ *du complexe, située dans un plan* Π, *est inscrite dans un cône ayant pour sommet le pôle du plan* Π *par rapport à l'ellipsoïde donné et circonscrit à une surface homofocale dont le* paramètre tangentiel *est égal et de signe contraire à celui de la surface homofocale qui touche le plan* Π; *elle est également inscrite dans un cylindre perpendiculaire au plan* Π *et circonscrit à la même surface homofocale que le cône précédent.*

18. Déterminons maintenant les longueurs des axes de la conique Γ représentée par l'équation (35). Je rap-

pellerai d'abord les formules suivantes, démontrées dans ma *Géométrie de l'espace*, p. 425 :

Si l'équation tangentielle d'une surface du 2[e] ordre est

$$\text{(I)}\quad \left\{ \begin{aligned} &Au^2 + A'v^2 + A''w^2 + 2Bvw + 2B'wu + 2B''uv \\ &\qquad + 2Cu + 2C'v + 2C''w + D = 0, \end{aligned} \right.$$

l'équation aux carrés, ρ^2, des longueurs des axes sera

$$\text{(II)}\quad \left\{ \begin{aligned} &D^4\rho^6 + D^2[D(A + A' + A'') - C^2 - C'^2 - C''^2]\rho^4 \\ &\quad + D[D(A'A'' - B^2 + A''A - B'^2 + AA' - B''^2) \\ &\qquad + 2(BC'C'' + B'C''C + B''CC') \\ &\qquad - C^2(A' + A'') - C'^2(A'' + A) \\ &\qquad\qquad - C''^2(A + A')]\rho^2 \\ &\qquad\qquad + \begin{vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & D \end{vmatrix} = 0. \end{aligned} \right.$$

La direction des axes étant définie par les équations

$$\text{(III)}\qquad \frac{\cos\alpha}{u} = \frac{\cos\beta}{v} = \frac{\cos\gamma}{w},$$

les quantités u, v, w seront déterminées à l'aide des équations

$$\text{(IV)}\quad \left\{ \begin{aligned} &(A - k)u + B''v + B'w + C = 0, \\ &B''u + (A' - k)v + Bw + C' = 0, \\ &B'u + Bv + (A'' - k)w + C'' = 0, \\ &\qquad Cu + C'v + C''w + D = 0; \end{aligned} \right.$$

$$\text{(V)}\quad \begin{vmatrix} A - k & B'' & B' & C \\ B'' & A' - k & B & C' \\ B' & B & A'' - k & C'' \\ C & C' & C'' & D \end{vmatrix} = 0.$$

19. Appliquons ces formules à l'équation (35) de la conique Γ.

Nous poserons :

$$(40) \quad \begin{cases} \mathcal{S} = u^2 + v^2 + w^2, & \text{cercle imaginaire de l'infini;} \\ \mathcal{G} = BCu^2 + CAv^2 + ABw^2, & \text{section de la surface G par le plan de l'infini;} \\ \mathfrak{H} = a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - 1, & \text{ellipsoïde donné;} \end{cases}$$

$\mathcal{S} = 0$ est l'équation tangentielle du cercle imaginaire de l'infini; $\mathcal{G} = 0$ est l'équation tangentielle de la section de la surface G par le plan de l'infini; $\mathfrak{H} = 0$ est l'équation tangentielle de l'ellipsoïde donné.

Nous poserons encore

$$(41) \quad \begin{cases} M = e\mathcal{S}_0 + \mathfrak{H}_0 - 1, \\ N = \mathcal{S}_0\mathcal{G}_0 - e\mathcal{S}_0 - \mathfrak{H}_0. \end{cases}$$

Les équations (I) et (V) deviennent alors respectivement, la première (I) :

$$(42) \quad \mathcal{S}_0^2\rho^4 - \mathcal{S}_0(e\mathcal{S}_0 + \mathfrak{H}_0 - 1)\rho^2 + (\mathcal{S}_0\mathcal{G}_0 - e\mathcal{S}_0 - \mathfrak{H}_0) = 0,$$

ou

$$(42\ bis) \quad \mathcal{S}_0^2\rho^4 - M\mathcal{S}_0\rho^2 + N = 0;$$

la seconde (V) :

$$(43) \quad k^2 - (e\mathcal{S}_0 + \mathfrak{H}_0 - 1)k + (\mathcal{S}_0\mathcal{G}_0 - e\mathcal{S}_0 - \mathfrak{H}_0) = 0,$$

ou

$$(43\ bis) \quad k^2 - Mk + N = 0.$$

Ainsi *l'équation* (42), *ou* (42 *bis*), *donne les carrés des longueurs des axes de la conique* Γ, *située dans le plan* (u_0, v_0, w_0); *l'équation* (43), *ou* (43 *bis*), *donne la quantité* k, *qui permettra, à l'aide des relations* (III) *et* (IV), *n°* 15, *de déterminer les directions de ces axes.*

Le calcul qui conduit aux équations (42) et (43) n'étant ni long ni difficile, je me dispenserai d'en écrire les détails.

20. Avant de tirer de ces formules les propriétés fondamentales qu'elles renferment, je vais compléter ce premier calcul en déterminant la direction des axes de la conique Γ.

Après y avoir remplacé les coefficients A, A',... par ceux de l'équation (35) de la conique Γ, les trois premières équations (IV), n° 18, peuvent s'écrire

$$(1^\circ)\quad \begin{cases} [\mathcal{G}_0 - A(k+1)]u + Au_0 = u_0[BCu_0u + CAv_0v + ABw_0w], \\ [\mathcal{G}_0 - B(k+1)]v + Bv_0 = v_0[BCu_0u + CAv_0v + ABw_0w], \\ [\mathcal{G}_0 - C(k+1)]w + Cw_0 = w_0[BCu_0u + CAv_0v + ABw_0w]; \end{cases}$$

d'où l'on déduit

$$(2^\circ)\quad \begin{cases} [\mathcal{G}_0 - A(k+1)]\dfrac{u}{u_0} + A = [\mathcal{G}_0 - B(k+1)]\dfrac{v}{v_0} + B \\ \qquad = [\mathcal{G}_0 - C(k+1)]\dfrac{w}{w_0} + C. \end{cases}$$

En désignant par μ la valeur commune des rapports (2°), on en tire

$$(3^\circ)\quad \begin{cases} u = u_0\,\dfrac{\mu - A}{\mathcal{G}_0 - A(k+1)}, \\ v = v_0\,\dfrac{\mu - B}{\mathcal{G}_0 - B(k+1)}, \\ w = w_0\,\dfrac{\mu - C}{\mathcal{G}_0 - C(k+1)}; \end{cases}$$

si l'on substitue ces valeurs dans les équations (1°), on constate qu'elles se réduisent à des identités, ce qui devait être.

Substituons alors dans la quatrième des équations (IV),

n° 18, qui n'a pas encore été utilisée, et qui est, dans le cas actuel,

$$u_0 u + v_0 v + w_0 w - S_0 = 0;$$

on trouve que, eu égard à l'équation (43 *bis*), le coefficient de μ, savoir :

$$\frac{u_0^2}{\mathcal{G}_0 - A(k+1)} + \frac{v_0^2}{\mathcal{G}_0 - B(k+1)} + \frac{w_0^2}{\mathcal{G}_0 - C(k+1)},$$

est nul; on a donc

$$\mu = \infty.$$

Or, d'après les équations (III), n° 18, on a

$$\frac{\cos\alpha[\mathcal{G}_0 - A(k+1)]}{u_0(\mu - A)} = \frac{\cos\beta[\mathcal{G}_0 - B(k+1)]}{v_0(\mu - B)} = \frac{\cos\gamma[\mathcal{G}_0 - C(k+1)]}{w_0(\mu - C)}.$$

Introduisons dans ces égalités la valeur $\mu = \infty$, on en conclut que *les angles* α, β, γ *de la conique* (Γ) *avec les axes sont déterminés par les équations*

$$(44) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\cos\alpha[\mathcal{G}_0 - A(k+1)]}{u_0} &= \frac{\cos\beta[\mathcal{G}_0 - B(k+1)]}{v_0} \\ &= \frac{\cos\gamma[\mathcal{G}_0 - C(k+1)]}{w_0}, \end{aligned} \right.$$

où k est une des racines de l'équation (43).

On peut encore *déterminer les axes de la conique* (Γ) *par les équations suivantes :*

$$(44\ bis) \quad \left\{ \begin{aligned} & u_0 x + v_0 y + w_0 z - 1 = 0, \\ & a_1^2[\mathcal{G}_0 - A(k+1)]\frac{x}{u_0} + b_1^2[\mathcal{G}_0 - B(k+1)]\frac{y}{v_0} \\ & \qquad + c_1^2[\mathcal{G}_0 - C(k+1)]\frac{z}{w_0} = 0. \end{aligned} \right.$$

La première de ces équations représente le plan de la conique; la seconde est celle d'un plan perpendiculaire

à celui de la conique et parallèle à la direction (α, β, γ) des axes de la conique.

Dans ces équations, k désigne une des racines de l'équation (43), savoir :

$$(43) \quad k^2 - (e\mathfrak{S}^0 + \mathfrak{H}_0 - 1)k + (\mathfrak{S}_0\mathfrak{G}_0 - e\mathfrak{S}_0 - \mathfrak{H}_0) = 0.$$

On vérifie aisément que les deux plans (44 *bis*) sont perpendiculaires entre eux, ce qui doit avoir lieu d'après le théorème VI, n° 15.

(*La suite prochainement.*)

DÉMONSTRATION DE DEUX THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. ERNEST PADOVA,
Élève à l'École Normale de Pise.

Si l'on représente par les deux équations

$$X'x + Y'y + Z'z + T't = 0,$$
$$X''x + Y''y + Z''z + T''t = 0,$$

une droite, on peut prendre pour coordonnées de la droite les quantités

$$J = Y'Z'' - Z'Y'', \quad G = Z'X'' - X'Z'', \quad H = X'Y'' - Y'X'',$$
$$L = X'T'' - T'X'', \quad M = Y'T'' - T'Y'', \quad N = Z'T'' - T'Z'',$$

entre lesquelles a lieu la relation

$$JL + GM + HN = 0,$$

parce que les rapports de cinq de ces quantités à la sixième déterminent complétement la position de la droite.

On pourrait prendre aussi, pour coordonnées de la droite, les six quantités

$$f = y'z'' - z'y'', \quad g = z'x'' - x'z'', \quad h = x'y'' - y'x'',$$
$$l = x't'' - t'x'', \quad m = y't'' - t'y'', \quad n = z't'' - t'z'',$$

entre lesquelles a lieu la relation

$$fl + gm + hn = 0,$$

où x', y', z', t' et x'', y'', z'', t'' représentent les coordonnées de deux points de la droite donnée.

1. Recherchons maintenant l'expression de la distance de deux points x_1, y_1, z_1, t_1 et x_2, y_2, z_2, t_2 au moyen de ces coordonnées f, g, h, l, m, n.

Pour cela, commençons par observer que la distance entre deux points en coordonnées quadrilinéaires peut se mettre sous la forme

$$r^2 = -\frac{abcd}{9V^2}\left[\frac{\overline{AB}^2}{cd}(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + \frac{\overline{AC}^2}{bd}(x_1 - x_2)(z_1 - z_2) + \frac{\overline{AD}^2}{bc}(x_1 - x_2)(t_1 - t_2) + \frac{\overline{BC}^2}{ad}(y_1 - y_2)(z_1 - z_2) + \frac{\overline{BD}^2}{ac}(y_1 - y_2)(t_1 - t_2) + \frac{\overline{CD}^2}{ab}(z_1 - z_2)(t_1 - t_2)\right],$$

où a, b, c, d sont les faces du tétraèdre fondamental, où AB, AC, CB, AD, BD, CD en sont les arêtes, et où V en est le volume.

Pour transformer cette équation en coordonnées de droites, il convient de prendre pour coordonnées, non pas les simples distances x, y, z, t des points de quatre plans fixes, mais quatre autres variables qui sont liées à

celles-ci par les relations

$$\xi = \frac{a}{3V}x, \quad \eta = \frac{b}{3V}y, \quad \zeta = \frac{c}{3V}z, \quad \tau = \frac{d}{3V}t,$$

et nous appellerons alors $f_1, g_1, h_1, l_1, m_1, n_1$ les quantités composées avec les ξ, η, ζ, τ comme les quantités f, g, h, l, m, n l'étaient avec x, y, z, t.

Nous aurons alors

$$\xi_1 + \eta_1 + \zeta_1 + \tau_1 = 1, \quad \xi_2 + \eta_2 + \zeta_2 + \tau_2 = 1,$$

et, par conséquent,

$$\xi_1 - \xi_2 = h_1 - g_1 + l_1, \quad \eta_1 - \eta_2 = - h_1 + f_1 + m_1,$$
$$\zeta_1 - \zeta_2 = g_1 - f_1 + n_1, \quad \tau_1 - \tau_2 = - l_1 - m_1 - n_1,$$

et, en substituant dans la précédente expression de r^2, nous aurons

$$\begin{aligned} r^2 = {} & g_1^2 \overline{AC}^2 + h_1^2 \overline{AB}^2 + f_1^2 \overline{BC}^2 + l_1^2 \overline{AD}^2 + m_1^2 \overline{BD}^2 + n_1^2 \overline{CD}^2 \\ & + 2\Sigma g_1 l_1 AC.AD \cos DAC \\ & + g_1 m_1 (\overline{AB}^2 - \overline{AD}^2 - \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2) \\ & + h_1 n_1 (\overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2 - \overline{BD}^2) \\ & + l_1 f_1 (\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 - \overline{AB}^2 - \overline{CD}^2), \end{aligned}$$

où, pour bien entendre comment va être étendu le signe Σ, il faut supposer à chacune des coordonnées de la droite attaché un côté du tétraèdre (avec un signe déterminé), et que l'on fasse ensuite toutes les combinaisons possibles deux à deux des coordonnées de la droite, qui sont attachées à deux côtés du tétraèdre qui se rencontrent.

Pour voir ce que représentent les trois derniers termes de la précédente expression, projetons le triangle ABD sur la droite CD; on aura

$$AB \cos(AB, CD) = AD \cos ADC + DB \cos BDC.$$

Mais

$$2\,\mathrm{AD}.\mathrm{CD}\cos(\mathrm{ADC}) = \overline{\mathrm{AD}}^2 + \overline{\mathrm{CD}}^2 - \overline{\mathrm{AC}}^2,$$

$$2\,\mathrm{BD}.\mathrm{CD}\cos(\mathrm{BDC}) = \overline{\mathrm{BD}}^2 + \overline{\mathrm{CD}}^2 - \overline{\mathrm{BC}}^2.$$

Nous aurons donc

$$2\,\mathrm{AB}.\mathrm{CD}\cos(\mathrm{AB}, \mathrm{CD}) = \overline{\mathrm{AD}}^2 - \overline{\mathrm{AC}}^2 - \overline{\mathrm{BD}}^2 + \overline{\mathrm{BC}}^2,$$

et semblablement

$$2\,\mathrm{AC}.\mathrm{BD}\cos(\mathrm{AC}, \mathrm{BD}) = \overline{\mathrm{AB}}^2 - \overline{\mathrm{AD}}^2 - \overline{\mathrm{BC}}^2 + \overline{\mathrm{CD}}^2,$$

$$2\,\mathrm{AD}.\mathrm{BC}\cos(\mathrm{AD}, \mathrm{BC}) = \overline{\mathrm{AC}}^2 - \overline{\mathrm{AB}}^2 - \overline{\mathrm{CD}}^2 + \overline{\mathrm{BD}}^2,$$

de façon que la dernière équation devienne

$$r^2 = f_1^2\,\overline{\mathrm{BC}}^2 + g_1^2\,\overline{\mathrm{AC}}^2 + h_1^2\,\overline{\mathrm{AB}}^2 + l_1^2\,\overline{\mathrm{AD}}^2 + m_1^2\,\overline{\mathrm{BD}}^2$$
$$+ n_1^2\,\overline{\mathrm{DC}}^2 + 2\Sigma f_1 g_1\,\mathrm{AC}.\mathrm{BC}\cos(\mathrm{AC}, \mathrm{BC}),$$

où maintenant le signe Σ s'étend à toutes les combinaisons possibles des coordonnées de la droite, prises deux à deux.

2. Déterminons maintenant l'expression du volume de la pyramide qui a pour sommets les points $(xyzt)_1$, $(xyzt)_2$, $(xyzt)_3$, $(xyzt)_4$.

Soient G, H, J, E ces quatre points, et indiquons par KQ, KP, MQ, OM les traces des plans HGE, EGJ, HGJ, HJE sur le plan fondamental BCD, et soit N le point de rencontre des traces KP et OM. Le point N sera, par conséquent, la trace de la droite JE sur le plan BCD. Il est facile de voir, en regardant la figure, que parmi les pyramides formées par les plans du tétraèdre JEGH et le plan BCD existe la relation

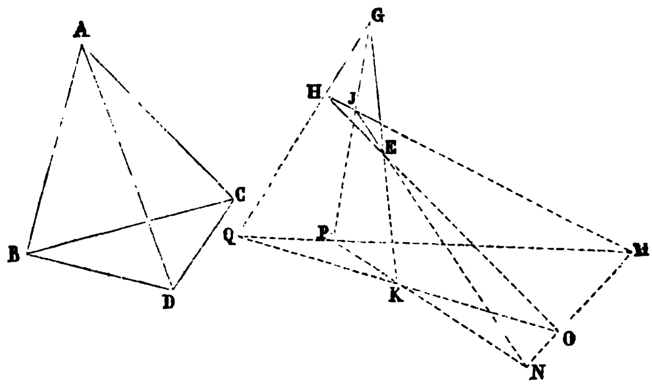
$$\mathrm{JEGH} = \mathrm{JNPM} + \mathrm{GKQP} - \mathrm{HOQM} - \mathrm{EKON},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\text{JEGH} = \tfrac{1}{3}(x_1\,\text{KQP} + x_3\,\text{NPM} - x_4\,\text{KON} - x_2\,\text{OQM})$$
$$= \tfrac{1}{3}[\text{KQP}(x_1 - x_2) + \text{NPM}(x_3 - x_2) - \text{KON}(x_4 - x_2)].$$

Pour avoir les coordonnées du point P de rencontre de la droite JG avec le plan BCD, observons qu'en les appelant y_P, z_P, t_P, on a

$$\frac{y_3 - y_P}{y_1 - y_P} = \frac{x_3}{x_1}, \quad \frac{z_3 - z_P}{z_1 - z_P} = \frac{x_3}{x_1}, \quad \frac{t_3 - t_P}{t_1 - t_P} = \frac{x_3}{x_1},$$



d'où l'on tire

$$y_P = \frac{x_1 y_3 - y_1 x_3}{x_1 - x_3}, \quad z_P = \frac{x_1 z_3 - z_1 x_3}{x_1 - x_3}, \quad t_P = \frac{x_1 t_3 - t_1 x_3}{x_1 - x_3},$$

et l'on pourrait avoir de même les coordonnées des autres points où les arêtes de la pyramide EJGH percent le plan BCD. Si maintenant on considère les points du plan BCD par rapport au triangle BCD pris comme triangle fondamental d'un système de coordonnées trilinéaires, ils auront pour coordonnées

$$y' = \frac{y}{\sin \text{CD}}, \quad z' = \frac{z}{\sin \text{BD}}, \quad t' = \frac{t}{\sin \text{BC}},$$

où CD, BD, BC représentent les angles dièdres qui ont pour arêtes CD, BD, BC respectivement. L'aire du triangle PQK est alors représentée par (Salmon, *Sections coniques*)

$$\frac{\mathrm{BD.DC.BC}}{8a^2 \sin \mathrm{BD} \sin \mathrm{DC} \sin \mathrm{BC}} \begin{vmatrix} y_{\mathrm{P}} & z_{\mathrm{P}} & t_{\mathrm{P}} \\ y_{\mathrm{Q}} & z_{\mathrm{Q}} & t_{\mathrm{Q}} \\ y_{\mathrm{K}} & z_{\mathrm{K}} & t_{\mathrm{K}} \end{vmatrix}.$$

Mais on a aussi, si X est l'ordonnée x du point A,

$$2c = \frac{\mathrm{X.BD}}{\sin \mathrm{BD}}, \quad 2b = \frac{\mathrm{X.DC}}{\sin \mathrm{DC}}, \quad 2d = \frac{\mathrm{X.BC}}{\sin \mathrm{BC}},$$

de façon que

$$\mathrm{PQK} = \frac{abcd}{27\mathrm{V}^3} \frac{1}{(x_1 - x_3)(x_2 - x_1)(x_1 - x_4)} \begin{vmatrix} y_1 x_3 - x_1 y_3 & z_1 x_3 - x_1 z_3 & t_1 x_3 - t_3 x_1 \\ y_1 x_2 - x_1 y_2 & z_1 x_2 - x_1 z_2 & t_1 x_2 - t_2 x_1 \\ y_4 x_1 - x_4 y_1 & z_4 x_1 - x_4 z_1 & t_4 x_1 - t_1 x_4 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{abcd}{27\mathrm{V}^3} \frac{-x_1^2}{(x_1 - x_3)(x_2 - x_1)(x_1 - x_4)} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & t_4 \end{vmatrix}.$$

De même, on aurait

$$\mathrm{NPM} = \frac{abcd}{27\mathrm{V}^3} \frac{x_3^2}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & t_4 \end{vmatrix},$$

$$\mathrm{KON} = \frac{abcd}{27\mathrm{V}^3} \frac{x_4^2}{(x_1 - x_4)(x_3 - x_4)(x_2 - x_4)} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & t_4 \end{vmatrix}.$$

On aura donc

$$3\,\text{JEGH} = \frac{abcd}{27\,V^3}\left[\frac{x_3^2}{(x_3-x_1)(x_3-x_4)} + \frac{x_1^2}{(x_1-x_3)(x_1-x_4)} + \frac{x_4^2}{(x_1-x_4)(x_3-x_4)}\right]$$

$$+ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & t_4 \end{vmatrix} = \frac{abcd}{27\,V^3}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & t_4 \end{vmatrix},$$

expression qui donne immédiatement la condition si connue pour que quatre points se trouvent sur un même plan.

REMARQUE SUR UN THÉORÈME DE M. A. PELLISSIER;

Par M. E. DE HUNYADY,
Professeur à l'École Polytechnique de Bude.

M. A. Pellissier a démontré, même tome, p. 44, le théorème suivant :

Si, par le foyer d'une conique, on mène des droites faisant avec les tangentes un angle constant, le lieu des rencontres de ces droites avec les tangentes est un cercle.

Le cercle, étant le lieu du point M, touche la conique en deux points; tous les cercles appartenant aux différentes valeurs de l'angle α enveloppent la conique donnée.

Non-seulement le lieu du point M, mais aussi le lieu du point M′ ayant $\frac{FM'}{FM} = n$, en désignant par n un nombre quelconque constant, est aussi un cercle dont le

centre est sur la droite OF en un point H ayant $\frac{FH}{FO} = n$, et le rayon du cercle est égal à $\frac{na}{\sin\alpha}$. L'équation du cercle mentionné, en désignant tangα par k, est la suivante

$$[x + (n-1)c]^2 + \left(y + \frac{nc}{k}\right)^2 = \frac{n^2a^2(1+k^2)}{k^2},$$

si la conique est donnée par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

L'enveloppe de tous ces cercles, appartenant aux différentes valeurs de l'angle α, est une conique de la même espèce que la conique donnée. L'équation de l'enveloppe en question est la suivante

$$\frac{[x+(n-1)c]^2}{n^2a^2} \pm \frac{y^2}{n^2b^2} = 1.$$

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une lettre adressée à la rédaction.

Permettez-moi de vous adresser quelques réflexions au sujet de divers articles récemment publiés dans votre excellent recueil. J'espère que, trouvant dans ces observations une preuve de l'attention avec laquelle je lis les *Nouvelles Annales*, vous les accueillerez avec plaisir.

I. Mes premières remarques se rapportent à une analyse, fort intéressante, de l'ouvrage de M. Schlömilch : *Compendium der höheren Analysis* (*). Cet ouvrage est

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. IX, p. 385.

fort bien fait, et mérite les éloges de M. Houël; mais, pour cette raison même, j'aurais désiré que certains points défectueux fussent signalés à l'attention de l'auteur et du lecteur.

Ainsi, M. Schlömilch donne (t. I, § 15) une démonstration inexacte de l'équation bien connue

$$\frac{d^2 f}{dx\,dy} = \frac{d^2 f}{dy\,dx}.$$

Il fait remarquer d'abord que si l'on change x en $x+h$, on a

$$f(x+h, y) = f(x, y) + hf'_x(x+\theta h, y),$$

et il admet que, y restant constant dans cette opération, θ est indépendant de y (*aus demselben Grunde hängt* θ *nicht von* y *ab*). Cela posé, il démontre sans peine, en faisant varier y sans faire varier θ, que l'on arrive au résultat cherché. Or ce point admis sans démonstration en exigerait une, ou plutôt ce lemme est erroné, et θ, en général, est une quantité dépendante de y. Géométriquement, si l'on prend x, y pour coordonnées horizontales et $f(x,y)$ pour ordonnée verticale d'une surface, le postulat reviendrait à ceci : prenons deux sections de la surface parallèles au plan XZ, et, sur chacune d'elles, l'arc compris entre les plans x, $x+h$; les points de ces deux arcs où la tangente est parallèle à la corde qui joint les extrémités de l'arc répondent à une même valeur $x+\theta h$ de l'abscisse. Il est visible que ce théorème est inexact.

L'erreur a été signalée, au reste, récemment par M. Lindelöf, et admise par l'auteur d'un article du *Bulletin des sciences mathématiques* (*). Mais je ne saurais partager l'opinion de ce dernier sur la légitimité des

(*) T. I, p. 275.

démonstrations du même théorème qui sont fondées sur ce *lemme :* Si $F(x, \alpha)$ est infiniment petit en même temps que α, quel que soit x, il en sera de même de $D_x F(x, \alpha)$. « Cette proposition, dit-il, qui se vérifie sur toutes les fonctions continues que l'on rencontre, nous semble être une hypothèse que l'on doit admettre au même titre que l'on admet, pour toute fonction continue d'une seule variable, l'existence d'une dérivée, c'est-à-dire que l'on exclut d'avance les fonctions discontinues ou oscillantes qui ne jouiraient pas de cette propriété. » Il me semble qu'il y a entre les deux cas une différence assez sensible. L'existencè de la dérivée d'une fonction continue $f(x)$ *en général,* c'est-à-dire abstraction faite de valeurs isolées et exceptionnelles de la variable, est une propriété qui découle de la continuité de la fonction et se démontre *à priori*. De même, je ne vois aucun inconvénient à admettre, dans une démonstration, la continuité de la dérivée $D_x f(x)$, *en général;* non plus qu'à admettre, pour la démonstration du théorème qui nous occupe, que la dérivée $D_x D_y f(x, y)$ est une fonction *généralement* continue de x et de y, parce que ces diverses propriétés résultent de la continuité des fonctions primitives, et ne cessent d'être vraies que pour des valeurs *particulières* des variables, qui ne peuvent se succéder sans intervalle. Mais il en est autrement du lemme indiqué ci-dessus, qui suppose en réalité la continuité de la fonction $D_x F(x, \alpha)$ dans le voisinage d'une valeur *particulière,* $\alpha = 0$, de la variable α. Aussi, bien loin qu'il se vérifie sur toutes les fonctions continues, peut-on citer un bon nombre de cas dans lesquels il est en défaut. Telle est la fonction $\alpha \sin \frac{x}{\alpha}$ qui est infiniment petite avec α, quel que soit x, tandis que sa dérivée $\cos \frac{x}{\alpha}$

ne tend alors vers aucune limite déterminée. Or, comme dans l'application que l'on fait d'ordinaire de ce lemme à la démonstration de l'équation

$$\frac{d^2f}{dx\,dy} = \frac{d^2f}{dy\,dx},$$

la fonction $F(x, \alpha)$ n'est autre que

$$\frac{f(x+\alpha, y) - f(x, y)}{\alpha} - f'_x(x, y),$$

fonction qui nous est profondément inconnue dans sa nature intime, rien ne nous donne le droit de supposer que la dérivée de cette fonction par rapport à x, lorsque α tend vers la valeur *particulière* zéro, ne devient pas elle-même indéterminée.

La démonstration de l'équation

$$\lim \frac{\Delta^2 f(x)}{\Delta x^2} = f''(x)$$

par M. Schlömilch (t. I, § 11) soulève des difficultés du même ordre.

Enfin signalons un passage (t. I, § 108) relatif aux solutions singulières des équations du premier ordre. D'après l'auteur, une telle équation ne peut renfermer de solution singulière, à moins qu'elle ne soit au moins du second degré par rapport à $\frac{dy}{dx}$ (*die vorige Bemerkung zeigt nun augenblicklich dass eine singuläre Lösung nur dann existiren kann, wenn die gegebene Gleichung wenigstens vom zweiten Grade ist*). Il n'en est rien, comme le montre immédiatement l'équation

$$\frac{dy}{dx} = 1 - (y - x)^{\frac{1}{3}},$$

qui admet la solution singulière $y = x$. M. Schlömilch

fonde cette conclusion sur ce que la solution singulière représente *toujours* l'enveloppe des intégrales particulières, auquel cas il faudrait, en effet, que celles-ci se coupassent généralement deux à deux. Mais la solution singulière peut être le lieu des *points de rebroussement* (c'est le cas dans l'exemple cité) ou des *points d'inflexion* des intégrales particulières, et alors le raisonnement tombe.

II. Dans le numéro d'octobre 1870 (2e série, t. IX, p. 457), M. Ruchonnet se propose de déterminer la distance δ d'un point M' d'une courbe gauche, à la sphère osculatrice correspondant à un point infiniment voisin M. Les considérations dont il fait usage sont assez compliquées : il arrive à ce résultat

$$\delta = \frac{\varepsilon\eta\, ds\, dS}{24R},$$

ε étant l'angle de contingence en M, η l'angle de torsion, ds l'élément de la courbe, dS celui de l'arête de rebroussement de la surface polaire au point correspondant, R le rayon de la sphère osculatrice. On peut écrire aussi, en désignant par r et T les rayons de première et de seconde courbure,

$$\delta = \frac{ds^3\, dS}{24rRT}.$$

Je possède des formules générales, très-commodes pour ce genre de recherches, qui me donnent, pour ainsi dire sans calcul,

$$\delta = \frac{ds^4}{24Rr^2} = \frac{\varepsilon^2 ds^2}{24R}.$$

L'un de ces résultats, évidemment, est inexact. J'ai quelque confiance dans mes formules, qui se vérifient de diverses

manières et sont d'ailleurs d'une démonstration assez simple. J'incline donc à penser qu'une erreur se sera glissée dans les déductions un peu longues de M. Ruchonnet, mais il faut quelque temps et quelque attention pour la découvrir.

III. Le numéro des *Nouvelles Annales* de juillet 1871 renferme (2e série, t. X, p. 318) un article, signé *un Abonné,* qui a pour objet la détermination du *rayon de courbure en un point de rebroussement d'une courbe plane,* et dont les résultats ne sont pas exacts. Pour mettre cela en évidence, je vais ici exposer cette théorie telle que je la donne dans mes leçons, puis comparer les résultats que j'obtiendrai avec ceux de l'auteur de cet article.

Soit $F(x, y) = 0$ l'équation d'une courbe plane; (a, b) un point M de cette courbe, α l'inclinaison de la tangente en M sur l'axe des x. Du centre M avec un rayon infiniment petit ρ, décrivons un cercle, et soit M' un point où ce cercle est coupé par la courbe; θ l'angle que fait le rayon MM' avec l'axe des x. Enfin, soient R le rayon de courbure en M et M'P une perpendiculaire abaissée du point M' sur la tangente en M. On a, d'après une expression bien connue du rayon de courbure,

$$R = \lim \frac{\overline{MM'}^2}{2M'P} = \lim \frac{\rho^2}{2\rho \sin(\theta - \alpha)},$$

ou encore

$$(1) \qquad R = \lim \frac{\rho}{2(\theta - \alpha)},$$

puisque, évidemment, $\sin(\theta - \alpha)$ est infiniment petit en même temps que ρ. C'est par la formule (1) que nous déterminerons le rayon de courbure dans les différents cas.

Si l'on pose

$$H = \pm \sqrt{\left(\frac{dF}{da}\right)^2 + \left(\frac{dF}{db}\right)^2},$$

on démontre facilement (*) que, pour les points de la courbe situés sur le cercle, ρ et θ satisfont à l'équation

$$(2) \quad H \sin(\theta - \alpha) + \rho f(\theta) + \rho^2 f_1(\theta) + \rho^3 [f_2(\theta) + \omega] = 0,$$

$f(\theta)$, $f_1(\theta)$,... étant des fonctions entières de $\sin\theta$, $\cos\theta$, que l'on forme très-facilement, soit en développant $F(a + \rho\cos\theta, b + \rho\sin\theta)$ par la formule de Taylor; soit, ce qui est plus simple lorsque l'équation $F(x, y) = 0$ est algébrique, en remplaçant dans cette équation x et y par $a + \rho\cos\theta$, $b + \rho\sin\theta$, réduisant par $F(a, b) = 0$, et ordonnant les termes suivant les puissances de ρ.

On tire de l'équation (2)

$$\frac{\rho}{\sin(\theta - \alpha)} = -\frac{H}{f(\theta) + \rho f_1(\theta) + \ldots},$$

d'où, ρ tendant vers zéro et θ vers α,

$$\lim \frac{\rho}{\theta - \alpha} = -\frac{H}{f(\alpha)}, \quad R = -\frac{H}{2f(\alpha)}.$$

Telle sera la valeur du rayon de courbure en un point *quelconque* de la courbe. Remplaçant H et $f(\alpha)$ par leurs valeurs, on aura la formule connue

$$R = \mp \frac{\sqrt{\left(\frac{dF}{da}\right)^2 + \left(\frac{dF}{db}\right)^2}}{\frac{d^2F}{da^2}\cos^2\alpha + 2\frac{d^2F}{da\,db}\sin\alpha\cos\alpha + \frac{d^2F}{db^2}\sin^2\alpha}.$$

Supposons maintenant qu'il s'agisse d'un point sin-

(*) *Voir* mon *Cours d'Analyse infinitésimale*, p. 180 et suiv.

gulier. On sait qu'un tel point est caractérisé par les équations

$$\frac{dF}{da} = 0, \quad \frac{dF}{db} = 0,$$

et, par suite, $H = 0$. Mais comme, dans ce cas, les valeurs de α qui déterminent les directions des tangentes au point singulier sont les racines de l'équation $f(\alpha) = 0$, le rayon de courbure se présente sous la forme $\frac{0}{0}$, et il faut chercher sa valeur autrement. L'équation (2) se réduit ici à

$$(3) \qquad f(\theta) + \rho f_1(\theta) + \rho^2[f_2(\theta) + \omega] = 0;$$

d'autre part, on a

$$f(\theta) = f(\alpha) + (\theta - \alpha)[f'(\alpha) + \varepsilon],$$

ε tendant vers zéro en même temps que ρ. Donc

$$(\theta - \alpha)[f'(\alpha) + \varepsilon] + \rho f_1(\theta) + \rho^2[f_2(\theta) + \omega] = 0,$$

d'où

$$\frac{\rho}{\theta - \alpha} = -\frac{f'(\alpha) + \varepsilon}{f_1(\theta) + \rho[f_2(\theta) + \omega]},$$

et enfin

$$(4) \qquad R = -\frac{f'(\alpha)}{2f_1(\alpha)}.$$

Cette formule donnera les rayons de courbure des deux branches qui se croisent en un point double, en y substituant successivement les valeurs de α qui répondent aux deux branches. Ainsi, pour la courbe

$$(y^2 - x^2)^2 - x^4 \sin x = 0,$$

qui a un point double $\left(x = \frac{\pi}{2}, y = 0\right)$, on a

$$\tan g \alpha = \pm \frac{\pi}{4},$$

et les deux branches ont même rayon de courbure

$$R = \left(1 + \frac{\pi^2}{16}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Si le point (a, b) est un rebroussement, les racines de l'équation $f(\alpha)$ sont, comme on sait, égales; $f'(\alpha)$ est donc nul, et, par conséquent, si $f_1(\alpha)$ est différent de zéro, auquel cas le rebroussement est de première espèce (*), $R = 0$. *Le rayon de courbure est donc nul, en général, en un point de rebroussement de première espèce.*

Si, au contraire, il s'agit d'un rebroussement de seconde espèce, $f_1(\alpha) = 0$; R prend de nouveau la forme $\frac{0}{0}$, et il faut recourir à l'équation (3). Comme $f(\alpha)$, $f'(\alpha)$ et $f_1(\alpha)$ sont ici nuls, on a

$$f(\theta) = \frac{(\theta - \alpha)^2}{1.2}[f''(\alpha) + \varepsilon], \quad f_1(\theta) = (\theta - \alpha)[f_1'(\alpha) + \varepsilon'],$$

ε et ε' tendant vers zéro avec ρ, et l'équation (3) devient, après substitution et division par $(\theta - \alpha)^2$,

$$\tfrac{1}{2}f''(\alpha) + \frac{\rho}{\theta - \alpha}f_1'(\alpha) + \frac{\rho^2}{(\theta - \alpha)^2}f_2(\theta) + \omega_1 = 0,$$

ω_1 désignant une quantité infiniment petite en même temps que ρ. Passant à la limite et remplaçant $\frac{\rho}{\theta - \alpha}$ par $2R$, on obtient l'équation

$$(5) \qquad R^2 + \frac{f_1'(\alpha)}{2f_2(\alpha)}R + \frac{f''(\alpha)}{8f_2(\alpha)} = 0,$$

équation du second degré qui détermine les rayons de courbure des deux branches au point de rebroussement.

(*) Ouvrage cité, p. 186.

Ainsi, en général, *ces rayons de courbure sont inégaux* (*).

Il est facile maintenant de se rendre compte de l'erreur que renferme l'article cité. Représentant par $u = 0$ l'équation de la courbe, et admettant que l'on ait pris le point singulier pour origine et la tangente commune aux deux branches pour axe des x, ce qui entraîne les relations

$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d^2u}{dx\,dy}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)_0 = 0,$$

si le rebroussement est de seconde espèce, l'auteur arrive à une équation que l'on peut écrire ainsi :

$$\frac{2}{3}\mathrm{R}\left(\frac{d^3u}{dx^2dy}\right)_0 + \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)_0 = 0;$$

elle est donc du premier degré seulement. Mais cela tient à ce que, dans le développement de $u(h, k)$ suivant les puissances de h et de k par la formule de Taylor, l'auteur a négligé certains termes du quatrième ordre, négligeables en effet dans les cas précédents, mais non dans celui-ci, où l'on divise l'équation par k^2. Rétablissant ces termes et corrigeant une petite erreur de calcul (à laquelle est due la présence du dénominateur 3 dans l'équation précédente), on trouvera, d'après les notations de l'auteur,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)_0 + \left(\frac{d^3u}{dx^2dy}\right)_0\mathrm{R} + \frac{1}{24}\left(\frac{d^4u}{dx^4}\right)_0 4\mathrm{R}^2 = 0,$$

équation identique avec notre équation (5) quand on fait dans celle-ci $\alpha = 0$, après avoir remplacé $f''(\alpha)$, $f_1'(\alpha)$ et $f_2(\alpha)$ par leurs valeurs développées.

J'observerai, en terminant, que M. Painvin s'est oc-

(*) La formule (5) est indiquée, comme exercice, dans mon *Cours d'Analyse*, p. 215.

cupé de la courbure en un point de rebroussement : je ne connais de son travail que les indications qui se trouvent dans les *Comptes rendus* (séance du 18 janvier 1869).

Louvain, le 22 mars 1872.

PH. GILBERT.

BIBLIOGRAPHIE.

Cours d'Analyse infinitésimale, par PH. GILBERT, professeur à l'Université de Louvain. *Partie élémentaire.*

L'auteur a condensé dans ce volume, formant la *Partie élémentaire* de son cours, les notions de calcul différentiel et de calcul intégral qui sont la base nécessaire de la science de l'ingénieur, en sorte qu'il convient parfaitement aux élèves de l'*École centrale* de Paris, par exemple. En outre, la rigueur n'ayant point été sacrifiée dans l'exposition des principes fondamentaux, ceux qui, après la lecture de ce volume, auraient pris goût à l'Analyse, pourraient compléter leurs études par la lecture d'un ouvrage plus étendu, les *Éléments de Calcul infinitésimal* de Duhamel, le *Cours de Calcul différentiel et intégral* de M. Serret, ou le second volume que l'Auteur espère publier. De cette manière, le nombre des personnes qu'intéresse la géométrie pourrait s'accroître et donner à notre enseignement supérieur des auditeurs plus nombreux.

Questions de trigonométrie, méthodes et solutions avec plus de 400 exercices proposés, à l'usage des candidats aux Écoles et de MM. les officiers de l'armée et de la marine; par M. A. DESBOVES.

On trouvera dans cet ouvrage les plus belles questions qui ont pu être extraites des auteurs étrangers, et une grande

variété d'autres. C'est en considérant la trigonométrie comme très-propre à exercer aux raisonnements rigoureux et suivis, que l'auteur a eu la pensée d'offrir ce livre à la jeunesse intelligente de nos armées, comme une préparation aux études vraiment sérieuses. D'ailleurs, nos jeunes officiers trouveront peut-être, dans les exercices proposés, quelques problèmes dont la recherche leur fera oublier les ennuis des garnisons et des longs calmes en mer.

An elementary Treatise differential Calculus, containing the theory of plane curves, with numerous examples; by BENJAMIN WILLIAMSON, A. M., fellow and tutor, Trinity College, Dublin.

L'auteur a pris, comme base de son Traité, la méthode des dérivées, sans se priver néanmoins des ressources de la méthode infinitésimale et de celle des différentielles. Toute discussion métaphysique a été soigneusement écartée comme plus propre à obscurcir qu'à éclairer l'esprit des jeunes gens. Enfin chaque théorie a été enrichie de nombreux exemples, de manière à ne laisser à celui qui les aura résolus aucun doute sur l'application des procédés et des méthodes.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 980

(voir 2e série, t. IX, p. 92);

PAR M. SANGUINÈDE,
Élève du lycée de Montpellier.

Une ellipse de grandeur constante est mobile autour de son centre, tandis qu'une droite passant par un point fixe demeure constamment parallèle au grand axe. Trouver le lieu des points d'intersection de la droite et

de l'ellipse. Déduire analytiquement cet énoncé de l'énoncé 933. (A. GUÉBHARD.)

Soit O le point fixe et C le centre de la conique; je prends le point O pour pôle et OC pour axe polaire. Soit P le point où la parallèle au grand axe menée par O coupe le petit axe, et M le point correspondant du lieu. J'ai, en posant $OC = d$,

$$\rho = OP \pm PM, \quad OP = d\cos\omega, \quad PM = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - d^2\sin^2\omega};$$

d'où

$$\rho = d\cos\omega \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - d^2\sin^2\omega},$$

ou, en coordonnées rectilignes,

$$b^2(x^2 + y^2 - dx)^2 - a^2b^2(x^2 + y^2) + a^2d^2y^2 = 0.$$

On voit que le lieu obtenu ne diffère pas de celui de la question 933. En effet, il est facile de voir que les énoncés des deux problèmes reviennent l'un à l'autre.

Soit une position quelconque de l'ellipse considérée dans l'énoncé 980, et M l'un des deux points du lieu correspondant; je transporte l'ellipse parallèlement à elle-même, de manière que son centre C vienne en M. Dans cette position, elle passe par le point C, et son grand axe passe par le point O; elle satisfait donc aux conditions de l'énoncé 933, et le lieu des centres de cette nouvelle série d'ellipses est le même que le lieu considéré.

La construction de la courbe obtenue ayant été donnée dans les *Nouvelles Annales,* je n'y reviendrai pas. Je ferai seulement observer qu'on peut remplacer l'ellipse par une hyperbole (il suffit, dans les résultats obtenus, de changer b en $b\sqrt{-1}$) et qu'on peut mener par le

point O des parallèles à l'un quelconque des deux axes. La construction des courbes n'offre pas de difficulté.

Note. — La même question a été résolue par M. F. Revel, élève du lycée de Douai.

Question 985

(voir 2e série, t. IX, p. 144);

PAR M. G. DUCUING,

Élève du lycée de Toulouse (classe de M. Forestier).

Soit K *la courbe d'intersection d'une surface du second ordre et d'une sphère ayant pour centre un point d'un plan de symétrie de la surface; désignons par* C *la projection orthogonale de* K *sur ce plan de symétrie, et par* C' *le lieu des points où ce même plan est coupé par les normales élevées aux différents points de* K; C *et* C' *sont deux coniques ayant leurs axes parallèles, et si l'on désigne respectivement par* a^2 *et* a'^2, b^2 *et* b'^2 *les carrés des axes parallèles, on a la relation*

$$a^2 a'^2 = b^2 b'^2.$$

(LAGUERRE.)

Soient

$$(1) \qquad Mx^2 + Ny^2 + Pz^2 = 1$$

l'équation d'une surface du second degré rapportée à ses plans principaux, et

$$(2) \qquad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + z^2 = R^2$$

celle d'une sphère ayant pour centre un point du plan des xy par exemple.

Pour avoir l'équation de C, projection sur xoy de l'intersection de ces deux surfaces, il suffit d'éliminer z entre leurs équations. Multipliant la seconde par P et la retranchant de la première, cela donne

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (M - P)x^2 + (N - P)y^2 + 2P\alpha x + 2P\beta y \\ \quad = P(\alpha^2 + \beta^2 - R^2) + 1. \end{array} \right.$$

Cherchons maintenant l'équation de C'. Les équations de la normale en un point (x, y, z) de la surface sont

$$\frac{X-x}{Mx}=\frac{Y-y}{Ny}=\frac{Z-z}{Pz}.$$

Pour $Z=0$, cela donne

$$X=\frac{P-M}{P}x,$$

$$Y=\frac{P-N}{P}y;$$

d'où

$$x=\frac{P}{P-M}X,$$

$$y=\frac{P}{P-N}Y.$$

Il suffit maintenant de porter ces valeurs de x et y dans les équations (1) et (2), et d'y éliminer z; ou, plus simplement, de porter x et y dans l'équation (3), qui est le résultat de l'élimination de z entre (1) et (2).

Cela donne, pour l'équation de C',

$$(4)\quad \frac{x^2}{M-P}+\frac{y^2}{N-P}-\frac{2\alpha x}{M-P}-\frac{2\beta y}{N-P}-\frac{\alpha^2+\beta^2-R^2}{P}-\frac{1}{P^2}=0.$$

On voit donc que C et C' sont des courbes du second ordre.

Elles ont leurs axes respectivement parallèles à l'axe des x et à l'axe des y, et par suite parallèles entre eux.

Reste à montrer que, si l'on désigne respectivement par a^2 et a'^2, b^2 et b'^2, les carrés des axes parallèles dans C et C', on a la relation

$$a^2a'^2=b^2b'^2.$$

En effet, si nous transportions les axes parallèlement

à eux-mêmes au centre de la conique C, son équation prendrait la forme

$$(M - P)x^2 + (N - P)y^2 = k,$$

ce qui donne

$$a^2 = \frac{k}{M - P},$$

$$b^2 = \frac{k}{N - P}.$$

De même, si nous portions les axes au centre de la conique C′ parallèlement à eux-mêmes, son équation prendrait la forme

$$\frac{x^2}{M - P} + \frac{y^2}{N - P} = k';$$

d'où

$$a'^2 = k'(M - P),$$
$$b'^2 = k'(N - P).$$

Il en résulte

$$a^2 a'^2 = kk', \quad b^2 b'^2 = kk'.$$

Donc

$$a^2 a'^2 = b^2 b'^2,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Note. — La même question a été résolue par M. E. Fournier, sapeur du Génie, à Montpellier.

Question 987

(voir 2e série, t. IX, p. 15);

PAR M. H. RUMPEN,
Étudiant à Bonn.

Trouver la somme de la série

$$\cos^3\varphi - \frac{1}{3}\cos^3 3\varphi + \frac{1}{3^2}\cos^3 3^2\varphi - \frac{1}{3^3}\cos^3 3^3\varphi + \ldots$$

(LAISANT.)

On a la suite d'égalités

$$\begin{aligned}
4\cos^3\varphi &= \cos 3\varphi + 3\cos\varphi,\\
4\cos^3 3\varphi &= \cos 3^2\varphi + 3\cos 3\varphi,\\
4\cos^3 3^2\varphi &= \cos 3^3\varphi + 3\cos 3^2\varphi,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
4\cos^3 3^n\varphi &= \cos 3^{n+1}\varphi + 3\cos 3^n\varphi.
\end{aligned}$$

Je multiplie la première de ces égalités par 1, la seconde par $-\frac{1}{3}$, la troisième par $\frac{1}{3^2}, \ldots$, la $n^{ième}$ par $\frac{1}{(-3)^n}$, et j'ajoute; j'aurai alors, en désignant par S_n la somme des n premiers termes de la série proposée,

$$4S_n = 3\cos\varphi + \frac{1}{(-3)^n}\cos 3^{n+1}\varphi.$$

Si l'on suppose maintenant qu'on fasse croître n indéfiniment, le second membre de l'égalité précédente aura pour limite $3\cos\varphi$; donc la série donnée est convergente, et a pour somme $\frac{3}{4}\cos\varphi$.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc, Prosper Pein, H. Brocard et F. Viala.

M. Catalan a donné, même série, t. IX, p. 201, une solution de cette question, déduite d'une formule plus générale.

Question 1019

(voir 2e série, t. X, p. 191);

PAR M. L. DESMONS,

Professeur au lycée de Reims.

Trouver le maximum de l'angle sous lequel une ellipse donnée est coupée par le cercle de courbure.

(WITWORTH.)

Soit V l'angle formé par les tangentes à l'ellipse et au

cercle au point ν où la corde commune au cercle de courbure et à l'ellipse rencontre l'ellipse (on ne considère que l'angle formé par les parties des tangentes situées au-dessus du grand axe); si φ et φ_1 désignent les angles de ces tangentes avec la partie positive du grand axe, on a

$$(1) \qquad V = \varphi - \varphi_1.$$

L'ellipse étant rapportée à ses axes, et α désignant le paramètre angulaire du point de contact M, la condition pour que quatre points dont les paramètres sont α, β, γ, δ, soient situés sur un même cercle est

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0.$$

Cette condition devient, dans le cas actuel où α, β, γ sont égaux,

$$(2) \qquad \delta = -3\alpha,$$

δ désignant le paramètre angulaire du point N. Or le coefficient angulaire de la tangente en un point (α) est

$$-\frac{b}{a}\cot\alpha,$$

donc

$$(3) \qquad \operatorname{tang}\varphi = \frac{b}{a \operatorname{tang} 3\alpha}.$$

D'ailleurs la corde du cercle osculateur et la tangente au point de contact sont également inclinées sur le grand axe; en désignant par ω l'inclinaison de cette corde sur le grand axe, on voit facilement que

$$(4) \qquad \operatorname{tang}\omega = \frac{b}{a \operatorname{tang}\alpha}, \quad \varphi_1 = 3\omega.$$

Soient φ' et φ'_1 les dérivées de φ et φ_1, on devra avoir

$$\varphi' - \varphi'_1 = 0.$$

Or la relation (3) détermine φ' :

$$\frac{\varphi'}{\cos^2\varphi} = \frac{-b}{a\,\text{tang}^2 3\alpha}\,\frac{3}{\cos^2 3\alpha} = \frac{-3b}{a\sin^2 3\alpha},$$

ou

$$(5)\quad \varphi' = \frac{-3b}{a}\,\frac{a^2\sin^2 3\alpha}{a^2\sin^2 3\alpha + b^2\cos^2 3a} = \frac{-3ab}{a^2\sin^2 3a + b^2\cos^2 3\alpha}.$$

Les relations (4) déterminent de même φ'_1 :

$$\varphi'_1 = 3\omega',\quad \frac{\omega'}{\cos^2\omega} = \frac{-b}{a\sin^2\alpha},$$

$$(6)\quad \varphi'_1 = \frac{-3ab}{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha};$$

de sorte que la condition $\varphi' = \varphi'_1$ équivaut à

$$(7)\quad a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha = a^2\sin^2 3\alpha + b^2\cos^2 3\alpha,$$

ce qui signifie que les diamètres conjugués des deux rayons OM, ON doivent être égaux. En développant la condition (7), on obtient

$$\sin^2\alpha = \sin^2 3\alpha,$$

ou

$$(8)\quad \sin\alpha = \sin 3\alpha,$$

$$(9)\quad \sin\alpha = -\sin 3\alpha.$$

Les relations (8) et (9) donnent

$$\alpha = 0,\ \alpha = \frac{\pi}{2},\qquad \alpha = \frac{\pi}{4},\ \alpha = \frac{3\pi}{4},$$

$$\alpha = \pi,\ \alpha = \frac{3\pi}{2},\qquad \alpha = \frac{5\pi}{4},\ \alpha = \frac{7\pi}{4}.$$

La deuxième série de valeurs correspond au maximum, car $\varphi' - \varphi'_1$ est de la forme

$$\varphi' - \varphi'_1 = K^2(\sin^2 3\alpha - \sin^2\alpha),$$

et si $\alpha < \frac{\pi}{4}$, le deuxième membre est > 0; il est au contraire < 0, si $\alpha > \frac{\pi}{4}$. La première série de valeurs correspond au minimum de V (en ne considérant que la valeur absolue de $\varphi - \varphi_1$).

Les deux extrémités de la corde commune doivent donc coïncider avec les extrémités de l'un des diamètres conjugués égaux.

Pour obtenir l'expression de la tangente de l'angle maximum, on a

$$\operatorname{tang} V = \frac{\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}\varphi_1}{1 + \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\varphi_1}, \quad \operatorname{tang}\varphi = -\frac{b}{a},$$

$$\operatorname{tang}\varphi_1 = \frac{3\operatorname{tang}\omega - \operatorname{tang}^3\omega}{1 - 3\operatorname{tang}^2\omega} = \frac{b(3a^2 - b^2)}{a(a^2 - 3b^2)};$$

d'où

$$\operatorname{tang} V = \frac{-4abc^2}{c^4 - 4a^2b^2}.$$

Cet angle est aigu si $a < b(\sqrt{2}+1)$, obtus si $a > b(\sqrt{2}+1)$. Il a une relation simple avec l'angle maximum θ de deux diamètres conjugués; cette relation est

$$V + \pi = 2\theta.$$

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc, professeur au lycée du Havre.

Question 1025

(voir 2ᵉ série, t. X, p. 192);

PAR M. E. KRUSCHWITZ,
Étudiant à Berlin.

Trois cercles quelconques passent par un même point. On mène les cordes d'intersection des cercles pris deux à deux, et on les prolonge de manière qu'elles

coupent chaque fois le troisième cercle. En joignant les points d'intersection des cercles à ces points nouveaux, on forme un hexagone. Démontrer que le produit des côtés de rang impair est égal au produit des côtés de rang pair (*). (CALLANDREAU.)

Soit O le point commun aux trois cercles, et B_3 le second point d'intersection des cercles C_1 et C_2, B_1 celui de C_2 et C_3, B_2 celui de C_3 et C_1. Les trois autres sommets de l'hexagone sont A_1 sur le cercle C_1, A_2 sur le cercle C_2, et A_3 sur le cercle C_3; de telle sorte que les sommets se présentent dans l'ordre suivant : $A_1\,B_3\,A_2\,B_1\,A_3\,B_2$.

En joignant B_1, B_2, B_3, nous obtenons les trois triangles semblables :

$$A_1B_3B_2,\quad B_1B_3A_2,\quad B_1A_3B_2,$$

car on a les égalités d'angles suivantes :

$$\begin{aligned} A_1B_3B_2 &= A_1OB_2 = A_2OB_1 = A_2B_3B_1 \\ &= OB_2B_1 + OB_1B_2 = OA_3B_1 + OA_3B_2 = B_1A_3B_2, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} B_2A_1B_3 = OB_2B_3 + OB_3B_2 = B_3OA_2 &= B_3B_1A_2 \\ &= B_2OA_3 = B_2B_1A_3. \end{aligned}$$

De la similitude des triangles, il résulte

$$A_1B_3 \,.\, A_2B_1 = B_1B_3 \,.\, B_2A_1$$
$$B_1B_3 \,.\, B_2A_3 = B_3A_2 \,.\, B_1A_3,$$

d'où

$$A_1B_3 \,.\, A_2B_1 \,.\, A_3B_2 = B_3A_2 \,.\, B_1A_3 \,.\, B_2A_1.$$

C. Q. F. D.

Note. — La même question a été résolue par MM. A. Pellissier, capitaine d'Artillerie à Douai, et H. Lez, à Lorrez.

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

Question 1041

(voir 2e série, t. X, p. 479);

PAR M. T. DOUCET,

Professeur au lycée de Lyon.

On donne deux surfaces fixes du second ordre qui se raccordent suivant une droite unique AB.

1° *Les pôles d'un même plan* P, *par rapport aux deux surfaces, sont sur une droite* Δ *qui rencontre la ligne* AB.

2° *Lorsque la droite* Δ *décrit un plan fixe passant par* AB, *le plan* P *tourne autour d'un point fixe également situé sur* AB.

3° *Lorsque le plan* P *tourne autour d'une droite fixe, la droite* Δ *décrit une surface du second ordre passant par la ligne* AB. (L. PAINVIN.)

1° La droite Δ rencontre AB, car ces deux droites sont situées dans le plan qui touche les deux surfaces au point d'intersection du plan P avec AB.

2° Soit Q le plan fixe passant par AB. Un point se mouvant dans ce plan, son plan polaire par rapport à l'une des surfaces doit passer par le point où le plan Q touche cette surface. Tel est donc le point fixe de AB, autour duquel tourne le plan P.

3° Soit D la droite fixe. Elle a deux conjuguées par rapport aux deux surfaces. La droite Δ s'appuie sur ces deux conjuguées et sur AB; elle engendre donc une surface du second ordre passant par AB.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc, professeur au lycée du Havre.

Question 1065

(voir 2e série, t. XI, p. 143);

PAR M. E. DEWULF.

On donne une conique et deux points A *et* B *dans l'espace. Par ces deux points, on mène un plan qui rencontre la conique en deux points* A' *et* B'. *Trouver le lieu du point* M *d'intersection des couples de droites* (AA', BB') *et* (AB', BA'). *Cas particuliers.*

(H. BROCARD.)

Le lieu des points M appartient à l'intersection des cônes qui ont pour sommets les points A et B et la conique donnée C pour base commune. Or ces cônes se coupent suivant une première courbe plane, la conique C; ils se coupent donc suivant une seconde courbe plane, une conique qui est le lieu des points M. Les cas particuliers sont ceux de l'intersection d'un cône du second degré par un plan.

De ce théorème, on peut déduire de nombreuses conséquences; j'en citerai quelques-unes.

1° Projetons les points A et B parallèlement à une droite donnée K sur le plan de la conique C en a et b. Soient S le point où la droite AB rencontre ce plan, m la projection de M. Le sommet m du triangle $A'B'm$, dont les trois côtés passent par des points fixes a, b et S en ligne droite, tandis que les sommets A', B' glissent sur une conique donnée, décrit une conique C_1.

2° Les points a et b restant fixes, si le point S parcourt la droite ab, le lieu des centres des coniques C_1 qui correspondent à chacune des positions de S est une ligne droite L.

3° Si les points a et b se déplacent, la conique C restant fixe, à chaque position de la droite ab il correspond

une droite L, toutes les droites L se coupent en un même point.

Ces deux derniers théorèmes peuvent s'énoncer de la manière suivante :

Si les sommets A et B des cônes qui ont pour base commune la conique C parcourent chacun une droite parallèle à la droite K, à chacune de leurs positions correspond une conique Σ lieu des points M, toutes les coniques Σ se projettent parallèlement à K sur le plan aC, suivant des coniques dont les centres sont sur une même droite L.

Si les droites A et B se déplacent parallèlement à K, à chacune de leurs positions correspond une droite L, toutes ces droites concourent en un même point.

Note. — La même question a été résolue par MM. Gambey, professeur au lycée de Saint-Étienne, et Moret-Blanc, professeur au lycée du Havre.

QUESTION.

1082. Montrer que pour toutes les valeurs entières et positives des trois nombres m, n, p (en supposant bien entendu $p > m + n$) la suite terminée

$$\begin{aligned} & m(m+1)(m+2)\ldots(m+n) \\ & + (m+1)(m+2)(m+3)\ldots(m+n+1) \\ & + (m+2)(m+3)(m+4)\ldots(m+n+2) \\ & + (m+3)(m+4)(m+5)\ldots(m+n+3) \\ & + \ldots + (p-n)(p-n+1)(p-n+2)\ldots(p-2)(p-1)p \end{aligned}$$

a pour valeur

$$\frac{(p+1)p(p-1)\ldots(p-n)-(m+n)(m+n-1)\ldots m(m-1)}{n+2}.$$

(Haton de la Goupillière.)

MÉMOIRE SUR L'EMPLOI DES IMAGINAIRES DANS LA GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE

(voir même tome, p. 108);

PAR M. LAGUERRE.

---

13. Parmi l'infinité de surfaces dérivées d'une courbe gauche G, se trouve en particulier la *développable isotrope*, circonscrite à cette courbe; j'entends par là la surface développable circonscrite à la fois à l'ombilicale et à la courbe donnée. Tous les plans qui lui sont tangents sont, par conséquent, des plans isotropes, et ses génératrices, comme nous allons le voir, sont des droites isotropes.

Soit m un point quelconque de G; pour construire les génératrices de la surface développable isotrope qui passent en ce point, menons la tangente à la courbe en m, et soit t le point où cette tangente perce le plan de l'infini. Menons par t les deux tangentes à l'ombilicale Ω et soient a et b leurs points de contact. Les plans tma et tmb sont deux plans isotropes tangents à la courbe G, et les génératrices correspondantes de la développable sont les droites isotropes ma et mb. Remarquons maintenant que, la droite ab étant la polaire du point t par rapport à l'ombilicale, le plan mba est perpendiculaire à la tangente mt; les génératrices de la développable, qui passent au point m, sont donc les deux droites isotropes passant par ce point dans le plan normal à la courbe.

J'imagine maintenant une droite passant par le point m et par le point m', pris sur la courbe G, à une distance infiniment petite de m. Les cônes isotropes ayant ces deux points pour sommets se coupent suivant un cercle,

dont le plan, perpendiculaire à mm', passe par le milieu de ce segment, et dont le rayon, égal à mm', est par conséquent infiniment petit. Le point m' venant à se confondre avec le point m, le plan du cercle d'intersection devient normal à la courbe au point m, le rayon de ce cercle devient nul et ce cercle se réduit à deux droites isotropes. Donc, quand une droite est tangente à une courbe gauche, le cercle, correspondant aux deux points de la courbe, qui sont réunis au point de contact, se compose des deux droites isotropes qui passent par ce point dans le plan normal à la courbe.

D'où cette conclusion : la développable isotrope, circonscrite à une courbe gauche, est la surface dérivée de cette courbe, lorsque la surface réglée, qui fixe le groupement de ses points, est la développable formée par les tangentes à la courbe.

Appliquons ces résultats à la recherche de la focale d'une courbe sphérique quelconque H ; on sait, d'ailleurs, que cette focale est la ligne double de la développable isotrope circonscrite à H.

En désignant par S la sphère qui contient cette courbe, pour qu'un point donné m soit situé sur une surface Σ dérivée de H, il est nécessaire et suffisant que le plan, associé au point m par rapport à la sphère (*), coupe la courbe H en deux points situés sur une génératrice de la surface réglée γ, qui détermine le groupement de points correspondant à la surface Σ. Si l'on considère en particulier la développable isotrope, qui correspond à la développable ayant H pour arête de rebroussement, pour qu'un point m soit situé sur cette développable isotrope, il faut et il suffit que le plan associé au point m soit tangent à la courbe H.

(*) Sur l'expression « plan associé à un point », *voir* n° 5.

Si *m* est un point de la focale, c'est-à-dire de la ligne double de la développable isotrope circonscrite à H, le plan associé à *m* est doublement tangent à H.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

La focale d'une courbe sphérique est le lieu des points associés (par rapport à la sphère qui contient la courbe) *aux divers plans doublement tangents à cette courbe.*

14. En particulier, supposons que la courbe donnée soit une biquadratique sphérique; on a, dans ce cas, quatre systèmes de plans doublement tangents à cette courbe et qui correspondent aux quatre cônes du second degré sur lesquels on peut la placer. La focale se compose donc de quatre biquadratiques sphériques. Pour les construire, considérons un de ces cônes K et son sommet O ; la biquadratique correspondante est le lieu des points associés aux plans tangents à ce cône. Ces plans tangents passant par le point fixe O, la courbe est située sur la sphère ayant ce point pour centre et coupant orthogonalement la sphère S, et elle est l'intersection de cette sphère par le cône supplémentaire du cône K dont le sommet est le centre de S.

Si la biquadratique donnée est une focale d'une surface anallagmatique, les quatre autres biquadratiques que l'on en déduit ainsi constituent avec elle la focale ordinaire de cette anallagmatique. On sait d'ailleurs que ces cinq courbes sont situées sur cinq surfaces du second degré homofocales ; les trois coniques focales communes à ces surfaces constituent la focale singulière de l'anallagmatique.

15. *Remarques sur la transformation par rayons vecteurs réciproques.* — Lorsqu'une surface passe par

l'ombilicale, sa focale complète se compose généralement de deux courbes distinctes (dont chacune peut elle-même se décomposer en plusieurs autres). Les plans isotropes tangents à la surface, dont le point de contact est à distance finie, enveloppent une développable dont la ligne double est la *focale ordinaire* de la surface ; la développable circonscrite le long de l'ombilicale a pour ligne double la *focale singulière*.

Pour prendre l'exemple le plus simple, on voit que la focale ordinaire d'une anallagmatique se compose de cinq biquadratiques sphériques qui ont entre elles les relations que j'ai indiquées plus haut, et que sa focale singulière se compose de trois coniques.

Une surface du second degré n'a généralement pas de focale singulière et sa focale ordinaire se compose de trois coniques; une sphère n'a qu'une focale singulière qui se réduit à son centre.

Quand on transforme une surface par rayons vecteurs réciproques, on voit facilement que la focale ordinaire de la transformée est la transformée de la focale ordinaire de la surface primitive.

Mais il n'en est pas de même relativement à la focale singulière. Pour voir ce qui a lieu dans ce cas, je ferai remarquer que tout point (réel ou imaginaire) de l'espace situé à distance finie est représenté par un cercle de l'espace dont le rayon est fini et dont le centre est situé également à distance finie.

Généralement, un point situé à l'infini n'est pas susceptible de mode de représentation, le cercle qui le représenterait étant alors rejeté entièrement à l'infini; il faut le définir par l'une quelconque des droites qui s'y croisent.

Lorsque le point considéré dans le plan de l'infini se trouve sur l'ombilicale, le cercle qui le représente se ré-

duit à une droite dont la direction seule est déterminée. Un point de l'ombilicale n'a donc pas, à proprement parler, de représentation; mais, si on le considère comme appartenant à une nappe d'une surface donnée, la droite qui le représente est alors déterminée; c'est la droite réelle du plan tangent à la nappe de la surface au point considéré.

Une sphère ayant une nappe unique, on voit que chaque point de l'ombilicale (considéré comme appartenant à la sphère) est représenté par une droite unique passant par le centre de cette sphère, si l'on suppose ce centre réel, en sorte que tous les points de l'ombilicale seront représentés par le système de toutes les droites qui rayonnent autour de ce point.

Une surface anallagmatique ayant deux nappes qui se coupent suivant l'ombilicale, chaque point de cette courbe est représenté par deux droites réelles; l'ensemble de toutes les droites que l'on obtient ainsi forme une *congruence* qui représente l'ombilicale.

Les considérations qui précèdent permettent d'établir facilement la proposition suivante :

Si l'on transforme une surface S *en* S' *par une transformation par rayons vecteurs réciproques; au moyen d'une sphère décrite autour d'un point* O *comme centre avec un rayon égal à* R,

1° *La focale ordinaire de* S *a pour transformée la focale ordinaire de* S';

2° *Pour obtenir la focale singulière de* S' *considérons le cône isotrope ayant pour sommet le point* O; *il coupe* S *suivant une courbe à double courbure, à laquelle on peut circonscrire une infinité de plans doublement tangents enveloppant une surface développable* Σ.

La courbe polaire réciproque de cette surface, par

rapport à la sphère décrite du point O comme centre avec $\frac{R}{\sqrt{2}}$ comme rayon, est la focale cherchée.

16. Si, en particulier, on considère une surface anallagmatique S, le cône isotrope ayant pour foyer le point O coupe l'anallagmatique suivant une biquadratique. La développable doublement circonscrite à cette courbe se compose de trois cônes du second degré, qui ont pour polaires, relativement à la sphère dont je viens de parler, les trois focales singulières de S'.

II.

PROPRIÉTÉS DES NORMALES AUX SURFACES ANALLAGMATIQUES (*).

Proposition fondamentale.

17. Je rappellerai d'abord quelques notions importantes relatives aux surfaces anallagmatiques.

On peut définir une surface anallagmatique Σ comme le lieu des points associés, par rapport à une sphère fixe S_1, des divers plans qui touchent une surface du second degré (ou *quadrique*) A_1.

L'intersection de S_1 et de A_1 est une biquadratique sphérique F_1 qui constitue l'une des focales ordinaires de Σ.

On sait, d'après M. Moutard, que la même surface est susceptible de quatre autres modes de génération semblables, au moyen de quatre autres quadriques A_2, A_3, A_4, A_5, et de quatre sphères correspondantes S_2, S_3, S_4, S_5.

(*) *Voir*, à ce sujet, *Bulletin de la Société Philomathique*, janvier 1868, ma *Note sur quelques propriétés des surfaces anallagmatiques*.

Les quatre biquadratiques F_2, F_3, F_4, F_5 suivant lesquelles se coupent respectivement ces quadriques et ces sphères, constituent avec F_1 la focale ordinaire complète de Σ, et toutes ces courbes sont reliées entre elles de la façon que j'ai indiquée dans le chapitre précédent.

Des nombreuses relations qui ont lieu entre ces diverses surfaces, je rappellerai seulement les suivantes, dont j'aurai besoin dans ce qui suit.

En désignant respectivement par O_1, O_2, O_3, O_4 et O_5 les cinq centres des sphères :

1° Quatre quelconques d'entre eux forment un tétraèdre conjugué par rapport à la sphère qui a pour centre le cinquième point et par rapport à la quadrique correspondante; ainsi le tétraèdre $O_1O_2O_3O_4$ est conjugué par rapport à S_5 et à A_5.

D'où il suit que O_5 est le point de rencontre des hauteurs du tétraèdre $O_1O_2O_3O_4$, ou encore que la droite O_4O_5 est perpendiculaire au plan $O_1O_2O_3$.

2° Deux quelconques des cinq sphères se coupent suivant un plan qui contient les centres des trois autres. Ainsi, le plan radical des sphères S_1 et S_2, que je désignerai par la notation P_{12}, est le plan $O_3O_4O_5$.

L'axe radical des trois sphères S_1, S_2 et S_3, que je désignerai par la notation D_{45}, est la droite O_4O_5.

18. Ceci posé, soient S_i et S_j deux sphères principales de l'anallagmatique Σ, et A_i, A_j les quadriques correspondantes.

M désignant un point quelconque de Σ et (M) le cône isotrope dont ce point est le sommet, le plan associé à M par rapport à S_i touche A_i en un point m_i que l'on peut appeler le point correspondant de M sur A_i; ce plan est d'ailleurs le plan radical de S_i et de (M) considéré comme une sphère de rayon nul. De même, le plan associé à M

par rapport à S_j touche A_j en un point m_j correspondant aussi à M, et ce plan est le plan radical de S_j et de (M).

D'après un théorème connu, ces deux plans radicaux se coupent sur le plan radical P_{ij} des deux sphères S_i et S_j.

On peut donc énoncer la proposition fondamentale suivante :

Théorème I. — *Si l'on désigne par m_i et m_j deux points correspondants sur les quadriques A_i et A_j, les plans tangents en ces points se coupent suivant une droite* E *située dans le plan P_{ij}. La droite $m_i m_j$ est normale à l'anallagmatique Σ, et le pied de la normale est situé dans le plan mené par D_{ij}, perpendiculairement à* E.

Comme l'on a dix plans P_{ij}, on voit, d'après le théorème précédent, que le système des normales à une anallagmatique donnée peut être engendré de dix façons différentes, au moyen de deux quadriques homofocales. De là résultent encore d'autres modes de génération de ces droites, au moyen de trois ou de quatre quadriques.

Ce sont ces diverses conséquences que je me propose d'étudier et de développer dans les paragraphes qui suivent.

Génération du système des droites normales à une même surface anallagmatique au moyen de deux quadriques homofocales.

19. De la proposition qui précède, on déduit facilement le théorème suivant :

Théorème II. — *Étant données deux quadriques homofocales A_1 et A_2 et un plan arbitraire P_{12}, si, de chaque droite* E *de ce plan on mène des plans tangents*

aux deux quadriques, et si l'on joint deux à deux les points de contact appartenant à des surfaces différentes, toutes les droites ainsi obtenues sont normales à une même surface anallagmatique Σ.

J'ajouterai que *la surface* Σ *est le lieu des points d'intersection de chacune des normales avec le plan mené par la droite, qui est le lieu des pôles du plan* P_{12} *par rapport aux surfaces homofocales à* A_1 *et* A_2, *perpendiculairement à la droite* E *correspondant à la normale*. On a ainsi un mode simple et direct de génération de la congruence de droites formée par les normales à une anallagmatique; et, comme je l'ai fait remarquer, cette congruence peut être engendrée, de la même façon, de dix manières différentes.

Tout ceci se rattache à l'étude de deux complexes de droites remarquables, que l'on peut définir ainsi qu'il suit :

Étant données arbitrairement deux quadriques, et m, m' désignant deux points pris respectivement sur chacune de ces surfaces, le premier complexe est composé des droites mm' telles, que les plans tangents en ces points se coupent sur une droite fixe. Le deuxième complexe (réciproque du premier) est composé des droites d'intersection des plans tangents en m et en m' quand la droite mm' s'appuie sur une droite fixe.

20. La construction précédente donne, pour chaque point m de A_1, deux des normales à Σ qui s'y croisent; comme ces deux droites doivent être symétriques par rapport au plan tangent à ce point, on en déduit la proposition suivante :

Théorème III. — *Si, par une droite* D, *prise arbitrairement dans l'espace, on mène des plans tangents à deux quadriques homofocales* A_1, A_2, *et qui la touchent*

respectivement en p_1, q_1 et p_2, q_2, la normale menée en p_1 à la quadrique A_1 est dans le plan des deux droites $p_1 p_2$ et $p_1 q_2$, et fait avec elles des angles égaux.

Si l'on considère le quadrilatère $p_1 q_1 p_2 q_2$, on voit que deux côtés consécutifs quelconques de ce quadrilatère, $p_1 q_1$ et $q_1 p_2$ par exemple, sont également inclinés sur la normale en q_1, et que leur plan contient cette normale; d'où cette conséquence curieuse :

Théorème IV (*). — *Étant données deux quadriques homofocales quelconques, si un rayon lumineux, mené d'une façon quelconque dans l'espace, se réfléchit une première fois sur la première surface, une seconde fois sur la deuxième, une troisième fois sur la première, et enfin une quatrième fois sur la deuxième, après ces quatre réflexions, il reprend la même route, en sorte que, quel que soit le nombre de réflexions analogues qu'il éprouve, il parcourt constamment les quatre côtés du même quadrilatère.*

En s'appuyant sur la théorie bien connue des caustiques, on déduit de là la proposition suivante, qui s'applique également aux coniques homofocales (**) et donne alors comme cas particulier la propriété focale qui sert de définition à l'ellipse et à l'hyperbole.

Théorème V. — *Étant donnés deux quadriques homofocales quelconques, si, par une droite prise arbitrairement dans l'espace, on mène des plans qui touchent respectivement ces surfaces aux points p_1, p_2 et q_1, q_2, la somme de deux côtés consécutifs du quadri-*

(*) Il est bien clair que l'on doit choisir d'une façon convenable les points de réflexion; de plus, on peut remarquer que deux des rayons réfléchis sont virtuels.

(**) Il est presque inutile de dire que tous les théorèmes énoncés dans ce Mémoire s'appliquent également aux anallagmatiques et aux coniques planes, ainsi qu'aux courbes sphériques analogues.

latère formé par ces quatre points est égale à la somme des deux autres, en sorte que l'on a

$$p_1 q_1 + q_1 p_2 = p_2 q_2 + q_2 p_1.$$

21. Aux propositions précédentes se rattache un mode de transformation de droites dans l'espace, qui mérite d'être signalé.

Étant données deux quadriques homofocales A et B et une droite quelconque D, considérons un des points où cette droite rencontre A, et soit a ce point; soit de même b un des points où la droite coupe B, les plans tangents en a et en b se coupent suivant une droite par laquelle on peut encore faire passer un plan tangent à A et un plan tangent à B; Δ désignant la droite qui joint leurs points de contact, je dirai que D et Δ sont des droites correspondantes conjuguées.

A une droite quelconque de l'espace D correspondent quatre droites Δ; si un rayon lumineux est dirigé suivant la droite D, après s'être réfléchi successivement sur chacune des deux quadriques, sa direction coïncidera avec celle d'une des droites conjuguées Δ, et l'on obtiendra ces quatre droites en choisissant, de toutes les façons possibles, les points où se fait la réflexion.

Du théorème de Malus, il résulte d'ailleurs que si un système de droites D est normal à une même surface, il en est de même des systèmes des droites conjuguées.

22. Le système des droites normales à une anallagmatique Σ étant défini comme je l'ai fait dans le § XIX au moyen des deux quadriques homofocales A_1 et A_2 et du plan fixe P_{12}, on peut se proposer de déterminer tous les autres éléments qui définissent Σ.

En conservant les notations du § XX, si l'on désigne en outre par K_j^i la conique suivant laquelle le plan P_{ij}

coupe la quadrique A_i, on obtiendra facilement les propositions suivantes :

Les centres O_1 *et* O_2 *des sphères correspondant aux quadriques* A_1 *et* A_2 *sont respectivement les pôles du plan* P_{12} *par rapport à ces surfaces. Les centres des trois autres sphères sont les points de rencontre des diagonales du quadrilatère complet formé par les quatre points d'intersection des coniques* K_2^1 *et* K_1^2.

Si l'on circonscrit une surface développable à la quadrique A_1 *et à la conique* K_1^2, *les trois autres coniques doubles de cette surface sont les coniques* K_1^3, K_1^4 *et* K_1^5, *et la développable est circonscrite à la sphère* S_1.

De là résulte, en particulier, une construction très-simple des diverses quadriques A_1, A_2, A_3,..., lorsque la surface anallagmatique est définie par l'une d'elles et la sphère correspondante.

Théorème VI. — *Une surface anallagmatique étant définie par une surface du second degré et une sphère, la développable circonscrite à ces deux surfaces a quatre lignes doubles qui sont des coniques. D'après un théorème dû à M. Chasles, par chacune de ces coniques on peut faire passer une quadrique homofocale à la première; les cinq quadriques ainsi déterminées sont précisément celles au moyen desquelles on peut engendrer la surface.*

23. Le système des normales à une surface anallagmatique Σ peut être *en général* engendré de dix manières différentes par le mode de construction que j'ai indiqué ci-dessus.

Si la surface a un plan de symétrie, quatre de ces modes de génération ne peuvent être généralement appliqués et deviennent illusoires.

On peut, en effet, définir cette surface au moyen d'une quadrique et d'une sphère S ayant son centre dans un des plans de symétrie H de cette quadrique; les centres des autres sphères principales de l'anallagmatique sont les sommets des cônes passant par l'intersection de la quadrique et de la sphère S. Dans le cas considéré, l'un de ces centres étant à l'infini, la sphère, la quadrique et le plan fixe correspondant se confondent tous les trois avec le plan de symétrie H; la proposition fondamentale ne peut donc plus s'appliquer, et il est nécessaire d'étudier directement ce cas spécial.

Mais avant d'aborder cette étude je dois encore faire une remarque sur un cas singulier qui semble présenter quelque intérêt.

24. Les normales à une surface anallagmatique ayant trois plans de symétrie peuvent être considérées comme le lieu des diverses droites qui joignent les points de deux quadriques homofocales pour lesquels les plans tangents sont parallèles.

Considérons maintenant deux quadriques homofocales, et soit H un de leurs plans de symétrie; prenons une droite quelconque E située dans ce plan, et menons par cette droite des plans tangents à ces deux surfaces; les droites qui joignent les points de contact situés sur l'une des surfaces aux points de contact situés sur l'autre sont toutes normales à une même série de surfaces parallèles pour lesquelles on saura même déterminer les lignes de courbure.

Dans le cas général (celui où le plan H n'est pas un plan de symétrie), on sait que, parmi ces surfaces parallèles se trouve une anallagmatique; dans le cas singulier que je considère, cette anallagmatique est rejetée à l'infini.

Je remarque, en effet, que le lieu des pôles du plan H, par rapport aux quadriques homofocales aux quadriques données, est l'axe Oz perpendiculaire au plan de symétrie H; les points de contact des plans menés par E aux deux quadriques sont situés sur un cercle dont le plan est perpendiculaire à E, et, par conséquent, parallèle au plan mené par Oz, perpendiculairement à cette droite. Il en résulte, d'après la construction donnée dans le n° 16, que tous les points de l'anallagmatique sont rejetés à l'infini.

(*La suite prochainement.*)

SIMPLES NOTES

1° Sur la limite des racines; — 2° Sur un théorème de Cauchy; — 3° Sur une question de licence;

PAR M. ABEL TRANSON.

I. *Limites supérieures des racines d'une équation donnée.* — Pour établir les *règles de Maclaurin* quelques calculs sont nécessaires, et ces calculs, quoique fort simples, ont embarrassé quelquefois à l'examen des candidats qui pourtant n'étaient pas sans valeur.

Je crois donc utile de rappeler d'abord une indication donnée autrefois par Terquem.

« Il semble qu'on n'insiste pas assez, dans l'exposition de la numération, sur une propriété très-importante et qu'on ne saurait trop tôt inculquer aux élèves : c'est que, dans tout nombre, une unité d'un ordre quelconque est plus grande que la somme de toutes les unités qui la suivent, et cela dans un système quelconque. Cette propriété est le fondement de la division et des extractions

de racines, et se retrouve même dans la théorie des équations. Ainsi, étant donné le polynôme

$$A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_m;$$

A_n étant le plus grand coefficient, $A_0(A_n + 1)^m$ est plus grand que la somme des termes qui suivent le premier, parce qu'alors le polynôme devient un nombre écrit dans le système dont la base est $A_n + 1$. » (*Nouvelles Annales*, 1re série, t. I, p. 51.)

Par ce moyen, on établira la première règle de Maclaurin sans calcul et d'une façon en quelque sorte intuitive. Or on peut ramener au même principe la démonstration de la formule $1 + \sqrt[n]{N}$, dans laquelle N est le plus grand des coefficients négatifs pris en valeur absolue, et n l'excès du degré de l'équation sur l'exposant de l'inconnue dans le premier terme négatif.

Il s'agit alors de trouver pour x un nombre qui satisfasse à la condition

$$x^m > N x^{m-n} + N x^{m-n-1} + \ldots + N.$$

A cet effet, considérons un nombre écrit dans la base b et de la forme suivante

$$(2) \quad b^m + (b-1) b^{m-1} + (b-1) b^{m-2} + \ldots + (b-1).$$

D'après le principe indiqué par Terquem, le premier terme de ce polynôme a une valeur supérieure à la somme des termes qui le suivent; on aura donc *à fortiori*

$$b^m > (b-1) b^{n-1} b^{m-n} + (b-1) b^{n-1} b^{m-n-1} + \ldots + (b-1) b^{n-1},$$

car on a conservé, mais en changeant seulement leur forme, les $m - n + 1$ premiers termes qui suivent b^m dans (2); et l'on a supprimé tous les autres.

On aura donc, par un nouvel *à fortiori*,

$$b^m > (b-1)^n b^{m-n} + (b-1)^n b^{m-n-1} + \ldots + (b-1)^n.$$

Et alors, pour satisfaire à la condition demandée, il suffit de prendre pour x une valeur de b qui satisfasse à la condition

$$(b-1)^n \geqq N,$$

ce qui donne $x \geqq 1 + \sqrt[n]{N}$.

On connait la *règle de Lagrange* : soient $-Ax^{m-p}$, $-Bx^{m-r}$, $-Cx^{m-s}, \ldots$, les termes négatifs de l'équation proposée; on a une limite supérieure des racines positives en additionnant les deux plus grandes des quantités $\sqrt[p]{A}$, $\sqrt[r]{B}$, $\sqrt[s]{C}, \ldots$

M. Pury a donné une démonstration de cette règle dans les *Nouvelles Annales*, 1re série, t. I, p. 243; mais il y a une *règle de Cauchy* beaucoup moins connue, souvent plus avantageuse que celle de Lagrange, et dont la démonstration est très-simple.

Soit l'équation proposée

$$x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \ldots + a_m = 0,$$

et soient a_p, a_r, $a_t, \ldots$ les coefficients négatifs en nombre K; on a une limite supérieure en prenant le plus grand des nombres suivants

$$(Ka_p)^{\frac{1}{p}}, \quad (Ka_r)^{\frac{1}{r}}, \quad (Ka_t)^{\frac{1}{t}}, \ldots.$$

En effet, écrivons les inégalités suivantes

$$b > (Ka_p)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{d'où} \quad b^p > Ka_p,$$

$$b > (Ka_r)^{\frac{1}{r}}, \quad \text{d'où} \quad b^r > Ka_r,$$

$$b > (Ka_t)^{\frac{1}{t}}, \quad \text{d'où} \quad b^t > Ka_t,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et ajoutons les termes de la seconde colonne, qui sont en nombre K, après avoir multiplié la première par b^{m-p},

la seconde par b^{m-r}, la troisième par b^{m-t}, ... ; il viendra, après avoir divisé par K,

$$b^m > a_p b^{m-p} + a_r b^{m-r} + a_t b^{m-t} + \ldots;$$

de sorte que le nombre b rend le premier terme de l'équation supérieur à la somme des termes négatifs. Donc, etc.

Pour comparer ces règles, appliquons-les à l'équation suivante

$$x^3 - Ax^2 + x - 27\,000 = 0,$$

dans laquelle A est un nombre positif quelconque inférieur à 19. La règle de Maclaurin donne 27001; celle de Lagrange donne A + 30, et celle de Cauchy donne 37.

II. *Sur un théorème de Cauchy.* — « La racine $m^{\text{ième}}$ » du produit de m nombres est plus petite que la moyenne » arithmétique entre ces nombres. »

M. Boutroux a démontré ce théorème par un calcul que Terquem déclare peu différent de celui que Cauchy avait donné dans son *Cours d'analyse* (p. 457; 1821), et en même temps (*) Terquem mentionne une démonstration de Lobatto et Bobillier, dans la *Correspondance mathématique* de Quetelet (t. IV; 1828); enfin, plus récemment, on a reproduit, dans les *Nouvelles Annales* (**), un autre calcul de M. Schlömilch pour établir que la moyenne géométrique est moindre que la moyenne arithmétique et supérieure à la moyenne harmonique. Quant au théorème de Cauchy, ne suffit-il pas de remarquer que le produit de m nombres, dont la moyenne arithmétique est donnée, est le plus grand possible lorsqu'ils sont tous égaux entre eux; or leur moyenne géométrique, c'est-

(*) *Nouvelles Annales*, 1re série, t. I, p. 368.
(**) *Nouvelles Annales*, 1re série, t. XVIII, p. 353.

à-dire la racine $m^{ième}$ de leur produit, est alors précisément égale à leur moyenne arithmétique; donc elle lui est généralement inférieure, et alors il est très-facile d'établir l'ordre de grandeur relative des trois moyennes M_a, M_g, M_h.

On a, par définition

$$\frac{m}{M_h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \ldots + \frac{1}{k} + \frac{1}{l},$$

d'où

$$\frac{m}{M_h} = \frac{\Sigma(ab\ldots k)}{(M_g)^m};$$

le numérateur du second membre est ici la somme des m produits $m-1$ à $m-1$ des nombres $a, b, \ldots, k, l$. Or la moyenne arithmétique de ces produits est, en vertu du théorème de Cauchy, supérieure à leur moyenne géométrique, qui est elle-même égale à

$$\sqrt[m]{(M_g)^{m(m-1)}};$$

d'où l'on conclut aisément

$$M_h < M_g.$$

III. *Sur une question de licence.* — M. Besant, du collége de Cambridge, donne, sous le n° 17 de ses *Exercices,* les propositions suivantes :

« Si un arc donné d'une courbe roule, d'abord extérieurement, puis intérieurement, sur le même arc d'une courbe fixe, la somme des arcs des roulettes d'un même point est indépendante de la courbe fixe. La même indépendance existe aussi pour la somme des aires comprises entre les lignes joignant le point entraîné au point de contact. » (*Voir* les énoncés de M. Besant, *Nouvelles Annales,* 2e série, t. X, p. 475.)

Dès l'année 1868, M. Gigon a donné la démonstration de ces deux propositions dans les *Nouvelles Annales*

(2e *série*, t. VII, p. 463), et il fait suivre sa démonstration de la *remarque* suivante : « Ces deux propositions remarquables sont dues à M. Hennig; mais la démonstration qui précède est différente de celle que cet auteur a publiée (*Journal de Crelle,* année 1865). »

D'après cela, on voit que MM. Hennig et Gigon ont ignoré que, dès l'année 1845, dans une *Note sur la théorie des épicycloïdes,* insérée au quatrième volume des *Nouvelles Annales* (1re série, p. 83), les deux théorèmes dont il s'agit ont été démontrés à l'aide d'une de ces considérations que Terquem appelait *intuitives*, et qui n'a exigé que quelques lignes de texte sans calcul ni figures. Les conséquences relatives à la rectification et à la quadrature soit des épicycloïdes et hypocycloïdes ordinaires ou allongées et accourcies, soit de quelques roulettes remarquables, sont présentées dans la même Note et de la même manière que les propositions principales. Mais il faut observer que la *Note* énonce ces deux propositions avec une circonstance dont l'omission dans les énoncés de M. Besant et dans la démonstration de M. Gigon (et dans celle de M. Hennig?) infirme la généralité des deux théorèmes.

Voici ce qui en est : il y a le roulement intérieur que M. Gigon caractérise très-clairement en disant que les centres de courbure de la courbe fixe et de la courbe mobile sont alors d'un même côté par rapport au point de contact ; mais, dans ce roulement même, il faut distinguer le cas où le rayon de courbure de la courbe mobile est plus petit que celui de la courbe fixe du cas où il est plus grand. C'est seulement au premier des deux cas que répond l'énoncé de Besant, et, pour l'exactitude, il faut dire avec la *Note :*

... *La* SOMME OU LA DIFFÉRENCE *des deux arcs décrits par un point quelconque du plan de la courbe mobile*

sera indépendante de la nature de la courbe fixe : la somme, si le rayon de courbure de la courbe fixe est, en chacun des points de contact, plus grand que celui de la courbe mobile; la différence, dans le cas contraire... (et une même distinction pour *la somme ou la différence* des aires correspondantes).

On comprendra la nécessité de cette distinction, en observant que si, à partir de la circonstance où la courbe mobile aurait, en chacun des points de contact, une courbure plus grande, c'est-à-dire un rayon de courbure moindre que celui de la courbe fixe, on augmentait la courbure de celle-ci en diminuant ses cercles osculateurs, l'arc et l'aire correspondante produits par le roulement extérieur augmenteraient jusqu'à atteindre et ensuite dépasser les valeurs relatives au cas où, les deux courbes étant identiques, le roulement intérieur devient impossible et ne concourt plus à former les sommes fixes définies par les deux théorèmes.

La *Note* se terminait en proposant aux lecteurs des *Nouvelles Annales* la question de savoir s'il existe pour la sphère un théorème analogue à celui de Cardan, d'après lequel, sur le plan, tout point d'un cercle roulant intérieurement sur un cercle de rayon double décrit une ligne droite. Je ne sache pas qu'il ait été répondu dans ce Recueil à cette question; mais M. Paul Serret l'a résolue habilement dans sa *Théorie géométrique et mécanique des lignes à double courbure*, p. 54. J'ajoute qu'en 1855 le même auteur, dans son savant traité *Des méthodes en Géométrie*, avait emprunté aux *Nouvelles Annales* les deux théorèmes proposés plus tard par M. Besant, et en avait donné (p. 136) une démonstration détaillée.

THÉORIE DES INDICES PAR RAPPORT A UNE COURBE ET UNE SURFACE DU SECOND DEGRÉ;

PAR M. FAURE,
Chef d'escadrons d'Artillerie.

Indice d'un point par rapport à une conique.

I. DÉFINITION. — *Si, par un point m, on mène une transversale rencontrant aux points a et b une conique donnée, le rapport du produit ma.mb au carré du demi-diamètre parallèle à la transversale est l'indice du point m par rapport à la conique.*

L'indice est négatif ou positif, suivant que le point *m* et le centre de la conique appartiennent à la même région de la courbe ou à des régions différentes. Ainsi, dans l'ellipse, l'indice d'un point extérieur est positif, mais il est négatif dans l'hyperbole. L'indice d'un point de la conique est nul, et celui du centre est égal à -1.

L'indice du point est susceptible de se définir d'un grand nombre de manières, de sorte que tout théorème relatif aux indices en donne immédiatement plusieurs autres, d'énoncés souvent très-différents. Nous indiquerons, sans démonstrations, quelques-unes de ces définitions; les unes, comme on le verra, sont spéciales au cas d'un point extérieur à la conique; d'autres, au cas d'un point intérieur; enfin les premières, plus générales, s'appliquent aux deux cas indifféremment :

1° L'indice d'un point est égal et de signe contraire au rapport des distances de ce point et du centre de la conique à la polaire du point.

2° La polaire du point *m* rencontrant en *n* l'un des

axes de la conique, on fait passer un cercle par le point n et les foyers (réels ou imaginaires) situés sur l'autre axe. L'indice du point m est égal à la puissance de ce point par rapport au cercle, divisée par le carré du demi-axe de la conique qui contient les foyers employés.

3° Si, du point m, on abaisse une perpendiculaire mp sur la polaire de ce point et que l'on prolonge cette perpendiculaire en q, où elle rencontre l'un des axes de la conique, on obtiendra l'indice du point m en divisant le produit $mp.mq$ par le carré du demi-axe qui ne passe pas au point q.

4° La racine carrée de l'indice du point m est égale à l'aire du quadrilatère déterminé par les tangentes menées du point m à la conique et les rayons menés du centre aux points de contact, divisé par le produit des demi-axes de la conique.

5° La racine carrée de l'indice du point m, par rapport à une ellipse, est égale à la tangente de la demi-différence des angles d'anomalie qui déterminent les points de contact des tangentes menées du point m à la conique.

6° La racine carrée de l'indice du point m est égale au produit des distances du point m aux foyers de la conique, multiplié par le sinus de l'angle sous lequel la conique est vue de ce point, et divisé par le double du produit des demi-axes de la conique.

7° La racine carrée de l'indice du point m est égale à la puissance de ce point, par rapport au cercle lieu des sommets des angles droits circonscrits à la conique, multiplié par la tangente de l'angle sous lequel la conique est vue de ce point, et divisé par le double du produit des demi-axes de la conique.

8° La racine carrée de l'indice du point m est égale au produit des demi-axes de la conique, divisé par le double

du carré du demi-diamètre qui passe au point m, multiplié par le sinus de l'angle formé par les tangentes menées du point m à la conique, et divisé par le produit des sinus des angles que forment ces tangentes avec le diamètre qui passe au point m.

9° La racine carrée de l'indice du point m est égale au sinus de l'angle formé par les tangentes menées du point m à la conique, divisé par le produit des sinus des angles que forment ces tangentes avec la droite menée du point m à l'un des foyers, multiplié par le rapport du demi-axe qui contient les foyers imaginaires, à l'autre axe.

10° Le point o étant le centre de la conique, par le point m menez le demi-diamètre oa, et la corde bc parallèle au diamètre conjugué de oa; l'indice du point m, pris en signe contraire, est égal au carré de l'aire du quadrilatère $obac$ divisé par le carré du produit des demi-axes de la conique.

11° Dans l'ellipse, l'indice du point m, pris en signe contraire, est égal au carré du sinus de la demi-différence des angles d'anomalie qui déterminent les points b et c de la construction précédente.

Indice d'une droite par rapport à une conique.

II. Définition. — *L'indice d'une droite est égal à l'indice du point où cette droite est rencontrée par le diamètre conjugué à sa direction, divisé par le carré du demi-diamètre parallèle à la droite.*

Les théorèmes suivants peuvent aussi servir de définition à l'indice d'une droite :

1° L'indice d'une droite est égal au produit des distances de cette droite aux tangentes de la conique parallèles à la droite, divisé par le carré du produit des demi-axes de la conique;

2° L'indice d'une droite est égal au produit des distances du pôle de la droite et du centre de la conique à cette droite, divisé par le carré du produit des demi-axes de la conique;

3° Si l'on prend un point arbitraire sur la droite donnée, l'indice de cette droite sera égal au produit des distances de ce point aux foyers de la conique, multiplié par le produit des sinus des angles formés par les tangentes menées à la conique par le point arbitraire, avec la droite donnée, divisé par le carré du produit des demi-axes de la conique;

4° Si l'on prend un point arbitraire sur la droite donnée, l'indice de cette droite, pris en signe contraire, sera égal au produit des sinus des angles formés par la droite avec les tangentes menées à la conique par le point arbitraire, divisé par le produit des sinus des angles formés par ces mêmes tangentes avec le diamètre qui passe par ce point et par le carré du demi-diamètre de la conique qui coïncide avec cette direction;

5° L'indice d'une droite est égal au carré de la distance du centre de la conique à la droite, divisé par le produit des carrés des demi-axes de la conique, diminué de l'inverse du carré du demi-diamètre parallèle à la droite donnée.

6° L'indice d'une droite est égal à la puissance du pied de la perpendiculaire abaissée de l'un des foyers sur la droite, par rapport au cercle décrit sur l'axe focal comme diamètre, divisé par le produit des carrés des demi-axes de la conique.

Les définitions suivantes sont spéciales au cas o la droite donnée rencontre la conique :

7° L'indice d'une droite, pris en signe contraire, est égal au carré de la demi-corde déterminée par cette droite dans la conique, divisé par la quatrième puissance du demi-diamètre parallèle à la droite;

8° Si l'on mène, par le centre o de la conique, une parallèle à la droite donnée, rencontrant au point a la tangente menée en un quelconque des points d'intersection de la droite avec la conique, l'indice de la droite, pris en signe contraire, est égal à l'inverse du carré de la longueur oa;

9° L'indice d'une droite, pris en signe contraire, est égal au carré du sinus de la demi-différence des angles d'anomalie qui déterminent les points d'intersection de la droite avec la conique, divisé par le carré du demi-diamètre parallèle à la droite.

Remarquons que l'indice d'une droite est nul lorsque cette droite touche la conique, et que l'indice d'un diamètre est égal au carré de l'inverse de la longueur du demi-diamètre, pris en signe contraire.

Indice d'un point par rapport à une surface du second degré.

III. Définition. — *Si, par un point m, on mène une transversale rencontrant aux points a et b une surface du second degré, le rapport du produit $ma.mb$ au carré du demi-diamètre parallèle à la transversale est l'indice du point m par rapport à la surface.*

De même que pour le cas des coniques, l'indice d'un point par rapport à une surface du second degré est négatif ou positif suivant que le point et le centre de la surface sont dans la même région de cette surface ou dans des régions différentes. L'indice d'un point de la surface est nul, et celui du centre est égal à -1.

L'indice d'un point par rapport à une surface se déduit aisément de l'indice de ce point par rapport à une conique. Menons, en effet, par le point m un plan arbitraire coupant notre surface suivant une conique. On

voit de suite que l'indice de ce point par rapport à la surface sera égal à l'indice du point par rapport à la conique, multiplié par le rapport de l'aire de la conique à celle de la section diamétrale parallèle au plan arbitraire. En particulier, l'indice d'un point par rapport à la surface sera égal à l'indice du même point par rapport à une section diamétrale passant par ce point. A l'aide des valeurs indiquées pour l'indice d'un point par rapport à une conique, on obtiendra des valeurs correspondantes pour l'indice d'un point par rapport à une surface. Nous citerons les suivantes :

1° L'indice d'un point par rapport à une surface du second degré est égal et de signe contraire, au rapport des distances de ce point et du centre de la surface, au plan polaire du point ;

2° Si, du point m, on abaisse une perpendiculaire mp sur le plan polaire de ce point, et qu'on la prolonge en q, où elle rencontre le plan déterminé par deux des axes de la surface, l'indice du point m sera égal au produit $mp.mq$, divisé par le carré du troisième demi-axe ;

3° Par le point m, menons une tangente ma à la surface ; désignons par o le centre de cette surface, par b l'extrémité du diamètre conjugué au plan oma, et par V le volume du parallélépipède construit sur le tétraèdre $omab$. La racine carrée de l'indice du point m sera égale au volume V, divisé par le produit des demi-axes principaux de la surface ;

4° Par le point m, menons la demi-corde ma conjuguée avec om ; désignons par b l'extrémité du diamètre conjugué au plan oma, et par V le volume du parallélépipède construit sur le tétraèdre $omab$. L'indice du point m, pris en signe contraire, sera égal au carré du volume V, divisé par le carré du produit des demi-axes principaux de la surface.

Indice d'une droite par rapport à une surface du second degré.

IV. Définition. — *L'indice d'une droite par rapport à une surface du second degré est égal à l'indice du point où cette droite est rencontrée par le plan diamétral conjugué à sa direction, divisé par le carré du demi-diamètre parallèle à la droite.*

On voit aisément que si l'on mène par la droite un plan arbitraire coupant la surface suivant une conique, l'indice de la droite par rapport à la surface sera égal à l'indice de cette droite par rapport à la conique, multiplié par le carré du rapport de l'aire de la conique à l'aire de la section diamétrale parallèle. A l'aide des valeurs indiquées pour l'indice d'une droite en géométrie plane, on obtiendra des valeurs correspondantes pour l'indice d'une droite dans la géométrie de l'espace.

1° L'indice d'une droite est égal et de signe contraire au carré de la demi-corde déterminée par cette droite dans la surface, divisé par la quatrième puissance du demi-diamètre parallèle à la droite;

2° Si l'on mène par le centre o de la surface une parallèle à la droite donnée rencontrant en a le plan tangent mené à la surface en un des deux points où elle est coupée par la droite, l'indice de cette droite, pris en signe contraire, sera égal à l'inverse du carré de la longueur oa;

3° On mène par la droite un plan tangent à la surface; la racine carrée de l'indice de cette droite est égale à la distance du point de contact à la droite, divisé par le produit des demi-axes de la section diamétrale parallèle au plan tangent;

4° La racine carrée de l'indice d'une droite est égale au sinus de l'angle que font entre eux les plans tangents

menés par la droite, divisé par le produit des sinus des angles formés par ces plans avec celui qui passe par la droite et le centre de la surface, et multiplié par le rapport du produit des demi-axes de la surface au double du produit des carrés des demi-axes de la section diamétrale qui passe par la droite.

5° L'indice d'une droite est égal au produit de la plus courte distance de cette droite à sa polaire par le sinus de l'angle de ces droites, par le demi-diamètre de la surface parallèle à la polaire, et par la distance du centre à la droite donnée, divisé par le produit des demi-axes de la conique diamétrale qui passe par cette droite et par celui des demi-axes de la surface donnée.

Nota. — L'indice d'une droite qui touche la surface du second degré est nul, et si une droite passe par le centre, son indice est égal et de signe contraire à l'inverse du carré du demi-diamètre qu'elle détermine.

(*La suite prochainement.*)

NOTE SUR LES ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. COMPAGNON,

Professeur au collége Stanislas.

Sur les mesures de la pyramide, du tronc de pyramide et du tronc de prisme triangulaire.

Pour établir la mesure d'une pyramide triangulaire SABC, on construit ordinairement un prisme ABCDSE, ayant pour base ABC, et pour l'une de ses arêtes l'une des arêtes de la pyramide, BS par exemple, on mène le plan SDC, et il s'agit de démontrer que *la pyramide* SABC *est le tiers du prisme* (voir *fig.* 3 ci-après).

Les auteurs, à partir d'Euclide, ont donné de cette

proposition des démonstrations plus ou moins longues et difficiles, et quelquefois des démonstrations dont la rigueur était loin d'être satisfaisante.

Aujourd'hui la marche, qui est assez généralement adoptée et qui est suffisamment simple, consiste à démontrer d'abord deux théorèmes qu'on peut regarder comme des lemmes, savoir :

LEMME I. — *Si l'on coupe une pyramide par un plan parallèle à sa base,*

1° *Les arêtes et la hauteur de cette pyramide seront divisées par ce plan en parties proportionnelles ;*

2° *La section sera un polygone semblable à la base de la pyramide.*

LEMME II. — *Si deux pyramides de même hauteur ont leurs bases situées sur le même plan et qu'on les coupe par un plan parallèle au plan des bases, les sections seront entre elles comme les bases.*

Ensuite, se fondant sur le principe des limites ou employant une démonstration par la réduction à l'absurde, on fait voir que *deux pyramides triangulaires de même hauteur et de bases équivalentes sont équivalentes.* Enfin, on passe à la proposition principale que l'on a en vue.

Or cette marche est-elle la plus naturelle? Est-elle de la plus grande simplicité possible? — Je ne le pense pas.

Elle n'est pas la plus naturelle, en ce qu'elle n'est pas indiquée essentiellement par une analyse très-attentive de la question. Car, après avoir décomposé un prisme triangulaire en trois pyramides triangulaires, on voit que deux de ces pyramides forment ensemble une pyramide quadrangulaire ayant pour base un parallélogramme, et qu'en réunissant l'une de ces deux premières pyramides à la troisième, on obtient encore une pyramide dont la base est un parallélogramme. Alors on est conduit à démontrer que, *si par deux arêtes opposées d'une pyra-*

mide ayant pour base un parallélogramme on mène un plan, la pyramide quadrangulaire sera divisée en deux pyramides triangulaires équivalentes.

De cette manière, on évite les lemmes I et II ci-dessus, et, par conséquent, la marche suivie aujourd'hui n'est pas la plus simple.

A la vérité, ces lemmes servent aussi à passer de la mesure du tronc de pyramide triangulaire à la mesure du tronc de pyramide quelconque; mais on peut arriver autrement à cette dernière mesure.

Après ces réflexions sommaires, nous allons entrer dans les détails et exposer comment on arrive à la mesure de la pyramide triangulaire.

Lemme. — *Si l'on divise en parties égales la hauteur* AT *d'une pyramide triangulaire* SABC, *et qu'on mène, par les points de division* x, y, z, *des plans parallèles à la base* ABC, *puis que l'on construise des prismes* DEFA, GHKD, LMNG, *intérieurs à la pyramide, ayant*

Fig. 1.

chacun pour base l'une des sections et pour arête l'une des parties égales AD, DG, GL *de l'une des arêtes* SA, *par exemple, le volume de la pyramide est la limite vers laquelle tend la somme des prismes, lorsque le nombre des divisions de la hauteur augmente indéfiniment.*

En effet, si l'on construit les prismes ABCD, DEFG, GHKL, LMNS qui sont extérieurs à la pyramide, on voit d'abord que la pyramide SABC est plus grande que la somme des prismes intérieurs et plus petite que celle des prismes extérieurs.

Ensuite, le premier prisme intérieur DEFA et le second prisme extérieur DEFG sont équivalents, comme ayant même base et des hauteurs égales, et, par la même raison, les prismes GHKD, LMNG sont respectivement équivalents aux prismes GHKL, LMNS. Donc, la différence entre la somme des prismes extérieurs et celle des prismes intérieurs n'est autre que le premier prisme extérieur ABCD, qui a pour mesure

$$ABC \times Ax \quad \text{ou} \quad ABC \times h,$$

en représentant Ax par h.

Maintenant supposons que le nombre des divisions de la hauteur AT augmente indéfiniment et qu'on répète successivement les mêmes constructions; en désignant toujours par h l'une des divisions de AT, on aura constamment, pour la différence des deux sommes de prismes,

$$ABC \times h.$$

Or h peut devenir moindre que toute quantité donnée, et il en est de même de la différence $ABC \times h$; donc, la pyramide SABC est comprise entre deux sommes de prismes dont la différence peut devenir aussi petite qu'on voudra, et, par conséquent, elle est la limite vers laquelle tend la somme des prismes intérieurs, ainsi que la somme des prismes extérieurs, lorsque le nombre des divisions de la hauteur AT augmente indéfiniment.

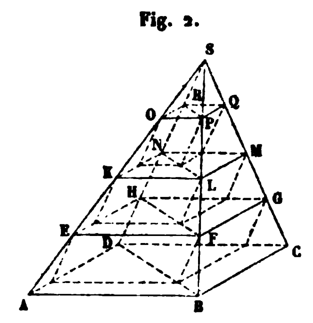
Ainsi le lemme est démontré.

Théorème I. — *Le plan, mené par deux arêtes opposées d'une pyramide ayant pour base un parallélo-*

gramme, divise cette pyramide en deux pyramides triangulaires équivalentes.

Soit la pyramide SABCD, dont la base ABCD est un parallélogramme, et par les arêtes opposées SD, SB menons un plan; je dis que les pyramides SABD, SBCD sont équivalentes.

Fig. 2.



Divisons l'arête SD en quatre parties égales, par exemple, et par les points de division menons des plans parallèles à la base ABCD, qui déterminent les sections EFGH, KLMN, OPQR. Ces sections seront des parallélogrammes; car les droites EF, HG sont parallèles comme étant respectivement parallèles aux côtés AB, DC, et de même EH est parallèle à FG, etc.; donc le plan SDB divise chacune de ces sections en deux triangles égaux.

Cela posé, dans la pyramide triangulaire SABD, construisons le prisme EFHD qui a pour base EFH et pour arête HD, ainsi que les prismes KLNH, OPRN, et construisons de même dans la pyramide SBCD les prismes FGHD, LMNH, PQRN. Alors les deux prismes EFHD, FGHD sont équivalents comme ayant des bases et des hauteurs égales; de même, les prismes KLNH, OPRN sont équivalents aux prismes LMNH, PQRN chacun à chacun; donc, en désignant par s la somme des prismes intérieurs à la pyramide SABD, et par s' celle des prismes

intérieurs à la pyramide SBCD, on a

$$s = s'.$$

Maintenant supposons que le nombre des parties égales de SD augmente indéfiniment et que l'on répète les constructions précédentes; en représentant toujours par s et s' les deux sommes de prismes, on aura constamment $s = s'$, et, si l'on remplace dans cette égalité les quantités variables s et s' par leurs limites, il s'ensuit que les deux pyramides SABD, SBCD sont équivalentes.

Remarque. — On peut démontrer ce théorème sans se fonder sur le lemme précédent.

En effet, supposons que les deux pyramides SABD, SBCD ne soient pas équivalentes et que SBCD soit la plus grande; alors, après avoir fait les mêmes constructions que ci-dessus, imaginons en outre les prismes BCDH, FGHN, LMNR, PQRS extérieurs à la pyramide SBCD et désignons par s'' la somme de ces prismes, par s la somme des prismes intérieurs à la pyramide SABD, on aura

$$s'' > \text{SBCD} > \text{SABD} > s.$$

Mais on verra facilement que la différence entre s'' et s n'est autre que le premier prisme extérieur BCDH, qui a pour mesure $\text{BCD} \times h$, en représentant par h la hauteur de ce prisme. D'ailleurs, en supposant que le nombre des parties égales de SD augmente indéfiniment, le produit $\text{ABC} \times h$ peut devenir moindre que toute quantité donnée; donc les pyramides SBCD, SABD, comprises entre s'' et s, sont nécessairement équivalentes.

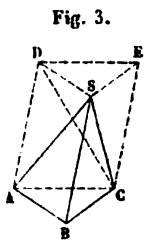
Théorème II. — *Une pyramide a pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur.*

1° Soit la pyramide triangulaire SABC. Je construis le prisme triangulaire ABCDSE, ayant pour base ABC

et pour arête l'une des arêtes BS de la pyramide, et par les droites SC, SD, je mène un plan qui coupe la face ADEC suivant DC.

Le prisme est ainsi décomposé en trois pyramides triangulaires SABC, SACD, SDEC, que nous désignerons par P, P′, P″; or P et P′ forment ensemble la pyramide quadrangulaire CABSD qui a pour base le parallélogramme ABSD; donc les pyramides P et P′ sont équivalentes. De même, P′ et P″ forment ensemble la pyramide SADEC, dont la base ADEC est un parallélogramme; donc les pyramides P′ et P″ sont équivalentes.

Fig. 3.



Donc la pyramide SABC est le tiers du prisme ABCDSE, et, par conséquent, elle a pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur.

2° Si une pyramide P a pour base un polygone quelconque, on peut décomposer ce polygone en triangles et la pyramide P en pyramides triangulaires, ayant pour bases ces différents triangles et pour sommet commun celui de la pyramide proposée; d'où il résulte que *la pyramide* P *a aussi pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur*.

Corollaire I. — *Deux pyramides de même hauteur et de bases équivalentes sont équivalentes comme ayant même mesure.*

Deux pyramides de même hauteur sont entre elles

comme leurs bases, et deux pyramides qui ont des bases équivalentes sont entre elles comme leurs hauteurs.

COROLLAIRE II. — *Le plan, mené par deux arêtes opposées d'une pyramide ayant pour base un trapèze, divise cette pyramide en deux pyramides triangulaires, qui sont entre elles comme les bases du trapèze qui leur correspondent.* Car ces pyramides triangulaires, ayant même hauteur, sont entre elles comme les triangles qui leur servent de bases, et ces triangles sont entre eux comme les bases du trapèze.

Remarque. — Comme on peut le prévoir, après avoir groupé les pyramides qui composent un prisme triangulaire pour en former des pyramides quadrangulaires, j'ai cherché s'il ne serait pas utile de grouper aussi les pyramides qui composent, soit un tronc de pyramide triangulaire, soit un tronc de prisme triangulaire. De là le corollaire II qui précède et qui va servir à démontrer les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME III. — *Un tronc de pyramide a pour mesure le tiers de sa hauteur, multiplié par la somme de ses bases et d'une moyenne proportionnelle entre ces deux bases.*

1° Soit le tronc de pyramide triangulaire ABCDEF, et menons les deux plans EAC, EDC.

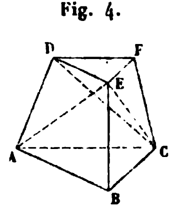
Le tronc est ainsi décomposé en trois pyramides triangulaires EABC, EADC, EDFC, que nous désignerons par P, P′, P″, et représentons par B, b les bases ABC, DEF du tronc, et par h sa hauteur. La première et la troisième de ces pyramides ont pour bases ABC, DEF, et pour hauteur celle du tronc; donc

$$P = \tfrac{1}{3} B \times h \quad \text{et} \quad P'' = \tfrac{1}{3} b \times h.$$

D'ailleurs, P et P′ forment ensemble la pyramide qua-

drangulaire CABED, qui a pour base le trapèze ABED, car les droites AB, DE sont parallèles comme intersections de deux plans parallèles par un troisième; de même,

Fig. 4.



P′ et P″ forment ensemble la pyramide EADFC, dont la base ADFC est un trapèze; donc on a

$$\frac{P}{P'} = \frac{AB}{DE} \quad \text{et} \quad \frac{P'}{P''} = \frac{AC}{DF}.$$

Mais les triangles ABC, DEF sont semblables, comme ayant leurs côtés parallèles; donc $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$, et, par suite,

$$\frac{P}{P'} = \frac{P'}{P''} \quad \text{d'où} \quad P' = \sqrt{P \times P''} = \tfrac{1}{3} h \sqrt{B \times b}.$$

Donc, en désignant par V le volume du tronc de pyramide proposé, on aura

$$V = \tfrac{1}{3} h \left(B + b + \sqrt{B \times b}\right),$$

C. Q. F. D.

2° Soit le tronc de pyramide quelconque

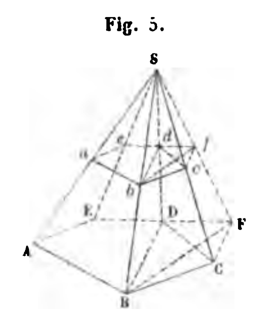
ABCDE*abcde*;

menons CF parallèle à la diagonale BD jusqu'à la rencontre en F du côté ED prolongé, et joignons BF. Les triangles BDC, BDF seront équivalents.

Ensuite, la droite SF rencontrera le prolongement

de *ed* en *f*, et si l'on joint ce point aux sommets *c*, *b*, puis que l'on mène la diagonale *bd*, les droites *cf*, *bd* seront parallèles comme étant respectivement parallèles

Fig. 5.



aux droites CF, BD et les triangles *bdc*, *bdf* seront aussi équivalents. Ainsi, les deux troncs de pyramides triangulaires BDC*bdc*, BDF*bdf* ont même hauteur et des bases équivalentes; donc ils sont équivalents.

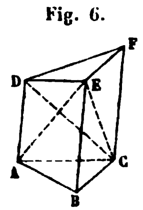
Donc le tronc de pyramide proposé et le tronc de pyramide ABFE*abfe* sont équivalents, et, de plus, les bases du premier sont respectivement équivalentes à celles du second.

Maintenant, si l'on répète successivement la même construction, on pourra transformer le tronc de pyramide quelconque en un tronc de pyramide triangulaire ayant même hauteur que le premier et des bases équivalentes. Donc le tronc de pyramide ABCDE*abcde* a aussi pour mesure le tiers de sa hauteur, multiplié par la somme de ses bases et d'une moyenne proportionnelle entre ces deux bases.

Théorème IV. — *Un tronc de prisme triangulaire* ABCDEF *a pour mesure le tiers de sa base* ABC, *multiplié par la somme des perpendiculaires* h, h', h'' *abaissées sur cette base des sommets* E, D, F *de la section* DEF.

Menons les plans EAC, EDC. Le tronc de prisme sera décomposé en trois pyramides EABC, EADC, EDFC, que nous désignerons par P, P′, P″.

Fig. 6.



La première a pour base ABC, et pour sommet le point E; donc on a

$$P = \tfrac{1}{3} ABC \times h.$$

Maintenant, si l'on désigne par e, d, f les pieds des perpendiculaires h, h', h'', les trois triangles rectangles EBe, DAd, FCf seront semblables, et l'on aura

$$\frac{EB}{DA} = \frac{h}{h'} \quad \text{et} \quad \frac{DA}{FC} = \frac{h'}{h''}.$$

D'ailleurs, P et P′ forment ensemble une pyramide quadrangulaire CABED, qui a pour base le trapèze ABED; de même, P′ et P″ forment ensemble la pyramide EADFC dont la base ADEF est un trapèze; donc on a

$$\frac{P}{P'} = \frac{EB}{DA} = \frac{h}{h'}, \quad \text{d'où} \quad P' = \frac{P \times h'}{h} = \frac{1}{3} ABC \times h',$$

et

$$\frac{P'}{P''} = \frac{DA}{FC} = \frac{h'}{h''}, \quad \text{d'où} \quad P'' = \frac{P' \times h''}{h'} = \frac{1}{3} ABC \times h''.$$

Donc, en représentant par V le volume du tronc de prisme, on aura

$$V = \tfrac{1}{3} ABC(h + h' + h''),$$

C. Q. F. D.

CORRESPONDANCE.

1. *Extrait d'une Lettre de M. Moret-Blanc.* — Dans un article inséré même tome, p. 118, M. Mansion, en parlant de la méthode par laquelle j'ai intégré l'équation différentielle

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 2\frac{d^2y}{dx^2} + y = Ae^x + Be^{-x} + C\sin x + D\cos x$$

s'exprime ainsi : « Le second devine la forme d'une solution particulière, ce qui lui permet d'arriver à la solution d'une manière très-expéditive. »

Je ferai remarquer que la méthode que j'ai employée n'exige aucune devination : la forme de l'intégrale particulière est celle du second membre de l'équation différentielle, sauf une légère différence dont je parlerai.

Il en est ainsi toutes les fois que, dans une équation différentielle linéaire à coefficients constants, le second membre est une expression, ou une somme d'expressions, de la forme

$$e^{mx}(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_px^p),$$

m étant réel ou imaginaire, ce qui comprend les sinus et cosinus.

En effet, ces expressions reproduisant par les différentiations et les intégrations successives des expressions de même forme, elles ne peuvent provenir que d'une intégrale de cette même forme, sauf le nombre des termes.

Ainsi, l'expression précédente ne peut provenir que d'une intégrale ayant une partie de la forme

$$e^{mx}(B_0 + B_1x + \ldots + B_px^p + \ldots + B_{p+n}x^{p+n}),$$

n étant l'ordre de l'équation différentielle; B_0, B_1,...

sont des coefficients qu'on déterminera en identifiant l'équation différentielle déduite de l'expression précédente avec la proposée, et dont quelques-uns pourront être nuls.

Quelques remarques permettent, dans certains cas, d'abréger le calcul :

1° On peut supprimer, dans l'intégrale particulière, les termes qui seraient compris dans l'intégrale générale de l'équation privée de second membre;

2° Les termes $e^{mx}(B_{p+1}x^{p+1} + \ldots + B_{p+n}x^{p+n})$ ne font pas nécessairement partie de l'intégrale; on peut ne les y introduire que successivement jusqu'à ce qu'on ait autant d'indéterminées que de coefficients à identifier.

Je doute qu'aucune méthode conduise plus rapidement au résultat que celle-ci, dans les cas où elle est applicable.

2. Nous avons reçu plusieurs solutions de la question **854**, que nous ne jugeons pas à propos d'insérer. Cette question n'est en effet, aux termes près, que la reproduction de la question **461**, proposée en 1859 par M. Vannson, et l'on en trouve la solution t. XVIII, p. 242 et 273; t. XIX, p. 34; t. XX, p. 155.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 32

(voir 1re série, t. I, p. 394);

PAR M. J. MISTER,

Répétiteur d'Analyse à l'École du Génie civil de Belgique.

THÉORÈME. — *a et b désignant les demi-axes principaux d'une ellipse, le périmètre de l'ellipse est toujours compris entre* $\pi(a+b)$ et $\pi\sqrt{2a^2+2b^2}$.

(J. BERNOULLI.)

On peut prendre pour coordonnées d'un point de l'ellipse

$$x = a\sin\varphi, \quad y = b\cos\varphi,$$

et par suite

$$dx = a\cos\varphi\, d\varphi, \quad dy = -b\sin\varphi\, d\varphi, \quad ds = \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}\, d\varphi,$$

d'où, pour un quart d'ellipse,

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}\, d\varphi,$$

ou encore

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}\, d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}\, d\varphi.$$

Si dans ces intégrales on donne à φ une valeur constante $\varphi = 0$, en appelant s_1 la nouvelle valeur de s, on aura

$$s_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} a\, d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{4}} b\, d\varphi,$$

d'où l'on tire

$$s - s_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi} + \sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi} - a - b\right) d\varphi.$$

Le multiplicateur de $d\varphi$ est une fonction de φ qui est toujours positive. En effet, sa dérivée est égale à

$$\frac{(a^2 - b^2)\sin 2\varphi}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}} - \frac{1}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}}\right),$$

et comme

$$\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi} < \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi},$$

cette dérivée sera positive, et comme la fonction s'annule

pour $\varphi = 0$, il en résulte que cette fonction sera toujours positive. Par conséquent, on pourra écrire

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi} + \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}\right) d\varphi > \int_0^{\frac{\pi}{4}} (a+b)\, d\varphi,$$

ou, E désignant le périmètre de l'ellipse,

$$\frac{E}{4} > (a+b)\frac{\pi}{4}.$$

Donc, 1°

$$E > \pi\,(a+b).$$

En second lieu, si dans la valeur de s on donne à l'angle φ la valeur constante $\varphi = \frac{\pi}{4}$, en appelant s_2 la nouvelle valeur de s, on aura

$$s_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2a^2 + 2b^2}\, d\varphi,$$

et par suite

$$s_2 - s = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\sqrt{2a^2 + 2b^2} - \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi} - \sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}\right) d\varphi.$$

Le multiplicateur de $d\varphi$ est une nouvelle fonction de φ qui est encore positive. En effet, sa dérivée étant égale à la précédente changée de signe sera toujours négative, mais ne pourra s'annuler, puisque φ est plus petit que $\frac{\pi}{4}$. Comme la fonction est positive pour $\varphi = 0$, il en résulte qu'elle sera constamment positive, et par suite on pourra encore écrire

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2a^2 + 2b^2}\, d\varphi > \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi} + \sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}\right) d\varphi$$

ou

$$\frac{E}{4} < \sqrt{2a^2 + 2b^2}\,\frac{\pi}{4}.$$

Donc 2°

$$E < \pi\sqrt{2a^2 + 2b^2}.$$

Note. — *Voir*, 1re série, t. III, une solution de M. A. Peyronny.

Question 166

(voir 1re série, t. VI, p. 394);

PAR M. H. BROCARD.

Le lieu géométrique des projections orthogonales du centre de la lemniscate de Bernoulli sur ses tangentes a pour équation polaire

$$\rho^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \cos\tfrac{2}{3}\omega.$$

(W. ROBERTS.)

L'équation polaire de la lemniscate étant

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta,$$

on en tire

$$\operatorname{tang} V = \frac{r}{r'} = -\cot 2\theta;$$

d'où

$$V - 2\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Mais, ρ et ω étant les coordonnées d'un point du lieu, on a

$$\rho = r\cos(\omega - \theta)$$

et

$$V = \frac{\pi}{2} + \omega - \theta;$$

on déduit de là

$$\omega = 3\theta,$$

et, pour l'équation du lieu,

$$\rho^2 = a^2 \cos^3 \frac{2\omega}{3},$$

ou

$$\rho^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \cos \tfrac{2}{3} \omega.$$

On trouverait de même que le lieu des projections du centre de cette nouvelle courbe sur ses tangentes, ou la deuxième podaire de la lemniscate, a pour équation

$$\rho^{\frac{2}{5}} = a^{\frac{2}{5}} \cos \tfrac{2}{5} \omega;$$

et d'une manière générale que les podaires successives des courbes

$$\rho^m = a^m \cos m\omega$$

appartiennent à la même famille (*).

Question 977

(voir 2ᵉ série, t. VIII, p. 563),

PAR M. MORET-BLANC,
Professeur au lycée du Havre.

On donne une parabole et un point intérieur à cette courbe; faire passer par le point donné une circonférence doublement tangente à la parabole. (Détermination graphique du centre et du rayon de la circonférence.)

Soient

(1) $$y^2 = 2px$$

l'équation de la parabole, x_1, y_1 les coordonnées du

(*) *Voir*, à ce sujet, l'exposé historique inséré au t. III de la 2ᵉ série, p. 80. *Voir* aussi, même série, t. IX, p. 30, et t. XI, p. 162, deux Notes de M. Allégret relatives aux propriétés de ces courbes.

point donné, l sa distance à l'origine et α, β les coordonnées inconnues du centre du cercle.

L'équation de ce cercle sera

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(x_1-\alpha)^2+(y_1-\beta)^2,$$

ou

$$(2) \qquad x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y=l^2-2\alpha x_1-2\beta y_1.$$

Son intersection avec la parabole sera déterminée par les équations (1) et (2). Pour que ce cercle soit doublement tangent à la parabole, il faut que l'équation du 4ᵉ degré en y, résultant de l'élimination de x entre ces deux équations, ait deux couples de racines égales, et, par conséquent, que son premier membre soit un carré. Cette équation est

$$y^4+4p^2y^2-4p\alpha y^2-8p^2\beta y-4p^2(l^2-2\alpha x_1-2\beta y_1)=0.$$

Le terme du 3ᵉ degré manquant, pour que le premier membre soit un carré, il faut d'abord que $\beta=0$, ce qu'on pouvait prévoir *a priori*.

L'équation se réduit à

$$y^4+4p(p-\alpha)y^2-4p^2(l^2-2\alpha x_1)=0.$$

Il faut ensuite que l'on ait

$$4p^2(p-\alpha)^2=4p^2(2\alpha x_1-l^2),$$

ou

$$(p-\alpha)^2=2\alpha x_1-l^2,$$

$$\alpha^2-2(x_1+p)\alpha+l^2+p^2=0,$$

$$\alpha=x_1+p\pm\sqrt{2px_1-y_1^2}.$$

Le point étant à l'intérieur de la parabole $2px_1-y_1^2>0$, le problème admettra toujours deux solutions.

La construction des deux valeurs de α revient à ce problème de Géométrie élémentaire : construire deux

lignes connaissant leur somme $2(x_1 + p)$ et leur produit $l^2 + p^2$.

Joignant le point α au point donné, on aura le rayon.

On parvient plus simplement au même résultat par d'autres considérations.

Le centre du cercle devant se trouver sur l'axe, si l'on nomme α sa distance au sommet, le carré du rayon ou de la normale sera égal à $p(2\alpha - p)$; mais il est aussi égal à $(x_1 - \alpha)^2 + y_1^2 = l^2 - 2\alpha x_1 + \alpha^2$; d'où l'équation

$$\alpha^2 - 2(x_1 + p)\alpha + l^2 + p^2 = 0.$$

Note. — La même question a été résolue par MM. O. Callandreau; J. Augier, élève du lycée de Lyon; Aubry, élève à Saint-Étienne; A. Morel, répétiteur à Sainte-Barbe; A. Petot, élève du lycée de Nancy; A. Luc; E. Laclais et H. Lez.

Question 1048

(voir 2e série, t. X, p. 557);

PAR M. GAMBEY,

Professeur au lycée de Saint-Étienne.

A, B, C *étant les angles d'un triangle rectiligne, on propose de rendre minimum*

$$\frac{\sin A}{\sin B . \sin C} + \frac{\sin B}{\sin A . \sin C} + \frac{\sin C}{\sin A . \sin B}.$$

(J.-CH. DUPAIN.)

Par la relation des sinus, je transforme l'expression proposée en celle-ci :

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2S},$$

dans laquelle a, b, c et S désignent les côtés et la surface d'un triangle rectiligne.

La question, ainsi transformée, restera tout aussi géné-

rale que la proposée, si j'établis entre les trois côtés a, b, c la relation

$$a + b + c = 2p = \text{const.};$$

car avec le périmètre et deux angles pris arbitrairement, pourvu que leur somme soit plus petite que deux droits, on peut toujours construire un triangle.

Mais alors le numérateur devient *minimum* et le dénominateur devient *maximum* pour $a = b = c$; donc l'expression transformée devient aussi minimum pour cette hypothèse.

Ainsi la condition cherchée est $A = B = C$, ce qui conduit à $2\sqrt{3}$ pour le minimum demandé.

Remarque. — Si l'on pose $\frac{b}{a} = \alpha$, $\frac{c}{a} = \beta$, et si l'on remplace S par

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{4}\sqrt{[(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2]},$$

il viendra, après avoir élevé au carré

$$\frac{4(1 + \alpha^2 + \beta^2)^2}{[(1+\alpha)^2 - \beta^2][\beta^2 - (1-\alpha)^2]}.$$

En égalant à zéro séparément les dérivées par rapport à α et β, on arrive aux équations

$$\alpha^2(\beta^2 - \alpha^2) + \alpha^2 - 1 = 0,$$
$$\beta^2(\alpha^2 - \beta^2) + \beta^2 - 1 = 0,$$

d'où l'on tire

$$\alpha = \beta = 1; \quad \text{par suite} \quad a = b = c,$$

comme ci-dessus. On vérifie aisément que c'est un minimum.

Note. — La même question a été résolue par MM. A. Pellissier; H. Brocard; S. Dautheville; Léon Lecornu, élève du lycée de Caen; C. Guesnet, élève du lycée du Havre.

QUESTIONS.

1083. On demande : 1° quel est le lieu du sommet d'un angle droit dont chacun des côtés rencontre deux droites données; 2° quelle est l'enveloppe du plan de cet angle droit. (Mannheim.)

1084. Les coniques, inscrites dans un quadrilatère fixe, qui touchent une courbe de troisième classe donnée K, sont au nombre de 12; les 12 points de contact, les 9 points de rebroussement de K et les 6 sommets du quadrilatère circonscrit sont situés sur une même courbe du cinquième ordre. (Laguerre.)

1085. Un point matériel se meut sur une courbe quelconque, et la force accélératrice est dirigée constamment vers le centre de courbure de sa développée; l'aire parcourue par son rayon de courbure est proportionnelle au temps. Examiner le cas où le point se meut sur une développante de cercle. (N. Nicolaïdès.)

1086. Si par le foyer commun F de deux coniques on mène une droite quelconque, et qu'aux points où elle coupe les deux coniques on mène les tangentes aux coniques en ces points, ces quatre tangentes formeront un quadrilatère dont les diagonales seront les cordes communes aux deux coniques.

La droite qui joint les foyers non communs des deux coniques jouit de la même propriété. (E. Lemoine.)

1087. Le produit des rayons de courbure d'une ellipse aux sommets d'un triangle inscrit, dont le centre de gravité coïncide avec le centre de l'ellipse, est égal au cube du rayon du cercle circonscrit au triangle.

(G. Fouret.)

ÉTUDE D'UN COMPLEXE DU SECOND ORDRE

(suite, voir même tome, p. 202);

Par M. PAINVIN.

21. Pour que la conique Γ se réduise à deux points distincts, il faut et il suffit que la longueur d'un de ses axes soit nulle.

Par conséquent, d'après l'équation (42), la condition unique pour que la conique (Γ) se réduise à deux points est

$$(45) \qquad \mathfrak{S}_0 \mathfrak{G}_0 - e\mathfrak{S}_0 - \mathfrak{H}_0 = 0.$$

Donc la surface enveloppée par les plans Π pour lesquels la conique du complexe se réduit à deux points est

$$(46) \qquad \mathfrak{S}\mathfrak{G} - e\mathfrak{S} - \mathfrak{H} = 0,$$

ou

$$(46\ bis) \quad \left\{ \begin{array}{l} (u^2 + v^2 + w^2)(BCu^2 + CAv^2 + ABw^2) \\ \qquad - e(u^2 + v^2 + w^2) - (a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - 1) = 0, \end{array} \right.$$

ou encore

$$(46\ ter) \quad \left\{ \begin{array}{l} (u^2 + v^2 + w^2)(BCu^2 + CAv^2 + ABw^2) \\ \qquad [(B + C)u^2 + (C + A)v^2 + (A + B)w^2 - 1] = 0. \end{array} \right.$$

L'équation (46 *bis*) nous montre que la surface en question est inscrite dans la développable circonscrite à l'ellipsoïde proposé et au cercle imaginaire de l'infini.

L'équation (46 *ter*) nous fournit une remarque qui sera utilisée plus loin, savoir : que tout plan (u, v, w), tel qu'on ait

$$(47) \quad (B + C)u^2 + (C + A)v^2 + (A + B)w^2 - 1 < 0,$$

ne peut pas toucher la surface Δ; ce plan est extérieur à

l'ellipsoïde

$$(B + C)u^2 + (C + A)v^2 + (A + B)w^2 - 1 = 0,$$

ou

$$\frac{x^2}{B + C} + \frac{y^2}{C + A} + \frac{z^2}{A + B} - 1 = 0,$$

lequel ellipsoïde renferme tout entière la sphère (S).

22. Démontrons maintenant que les plans qui touchent la surface (46) touchent également la surface Δ, n° **8**. Quoique cette proposition résulte du théorème analogue, démontré par Plücker pour le cas d'un complexe général du 2ᵉ ordre, il y a cependant quelque intérêt à montrer comment nos formules se prêtent à sa démonstration.

D'après l'équation (27), n° **12**, nous voyons que les coordonnées u_0, v_0, w_0 d'un plan tangent à la surface Δ sont

$$u_0 = \frac{x_0(b^2c^2 + AS_0 + G_0)}{h + gS_0 + eG_0 - H_0},$$

$$v_0 = \frac{y_0(c^2a^2 + BS_0 + G_0)}{h + gS_0 + eG_0 - H_0},$$

$$w_0 = \frac{z_0(a^2b^2 + CS_0 + G_0)}{h + gS_0 + eG_0 - H_0};$$

et si nous supposons le point de contact (x_0, y_0, z_0) sur la nappe supérieure de Δ, par exemple, les formules (23), n° **11**, transformeront ces expressions en les suivantes :

$$(1^\circ)\quad \begin{cases} u_0 = \dfrac{x_0(b^2c^2 + A\rho_2 + \rho_1^2)}{h + g\rho_2 + e\rho_1^2 + \rho_1^2\rho_2}, \\[2ex] v_0 = \dfrac{y_0(c^2a^2 + B\rho_2 + \rho_1^2)}{h + g\rho_2 + e\rho_1^2 + \rho_1^2\rho_2}, \\[2ex] w_0 = \dfrac{z_0(a^2b^2 + C\rho_2 + \rho_1^2)}{h + g\rho_2 + e\rho_1^2 + \rho_1^2\rho_2}. \end{cases}$$

On a d'ailleurs

$$(2^\circ)\quad \left\{\begin{aligned} x_0^2 &= -\frac{(a^4-\rho_1^2)(a^2+\rho_2)}{b_1^2c_1^2},\\ y_0^2 &= -\frac{(b^4-\rho_1^2)(b^2+\rho_2)}{c_1^2a_1^2},\\ z_0^2 &= -\frac{(c^4-\rho_1^2)(c^2+\rho_2)}{a_1^2b_1^2}.\end{aligned}\right.$$

Nous allons maintenant calculer en fonction de ρ_1 et ρ_2 les quantités

$$(3^\circ)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{S}_0 &= u_0^2+v_0^2+w_0^2,\\ \mathfrak{G}_0 &= \mathrm{BC}u_0^2+\mathrm{CA}v_0^2+\mathrm{AB}w_0^2,\\ \mathfrak{H}_0 &= a^2u_0^2+b^2v_0^2+c^2w_0^2-1,\end{aligned}\right.$$

en attribuant à u_0, v_0, w_0 les valeurs (1°).

Si l'on se reporte aux relations (28), (29), (30) et (30 *bis*) du n° 13, on obtient très-facilement

$$(48)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{S}_0 &= \frac{\rho_1^2-\rho_2^2}{\mathrm{E}},\\ \mathfrak{G}_0 &= \frac{e\mathrm{E}-\mathrm{F}}{\mathrm{E}},\\ \mathfrak{H}_0 &= \frac{-(\rho_1^2-\rho_2^2)\mathrm{F}}{\mathrm{E}^2},\end{aligned}\right.$$

où

$$(48\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{E} &= \rho_1^2\rho_2+e\rho_1^2+g\rho_2+h,\\ \mathrm{F} &= \rho_1^4+e\rho_1^2\rho_2+g\rho_1^2+h\rho_2.\end{aligned}\right.$$

Les équations (48) établissent des relations assez simples entre les quantités $\mathfrak{S}_0$, $\mathfrak{G}_0$, $\mathfrak{H}_0$ correspondant à un plan tangent à la surface Δ et les paramètres ρ_1 et ρ_2 de son point de contact.

On obtiendrait les formules correspondant à la nappe inférieure de Δ en remplaçant ρ_2 par ρ_3 dans les précédentes.

Les formules (48) nous donnent

$$\mathfrak{s}_0\mathfrak{g}_0 - e\mathfrak{s}_0 - \mathfrak{h}_0 = 0,$$

c'est-à-dire que les plans tangents à la surface Δ touchent la surface (46).

Nota. — On peut encore démontrer que, lorsqu'un plan Π devient tangent à la surface Δ, la conique (Γ) située dans ce plan se réduit à deux points, en supposant que ce plan se déplace parallèlement à lui-même et en remarquant que la conique Γ est imaginaire quand le plan Π est extérieur à la surface Δ, qu'elle devient une hyperbole quand le plan Π passe entre les deux nappes de la surface Δ, puis une ellipse réelle lorsque le plan Π pénètre dans la nappe intérieure de Δ. De là résulte évidemment que la conique (Γ) se réduit à un système de deux points quand le plan Π vient toucher une des nappes de la surface Δ.

Quant à la remarque sur laquelle s'appuie cette démonstration, elle est une conséquence des théorèmes V et VI. On peut aussi l'établir comme il suit.

23. Les longueurs des axes de la conique (Γ) sont données, n° **19**, par l'équation

$$(42)\qquad \mathfrak{s}_0^2\rho^4 - \mathfrak{s}_0(e\mathfrak{s}_0 + \mathfrak{h}_0 - 1)\rho^2 + (\mathfrak{s}_0\mathfrak{g}_0 - e\mathfrak{s}_0 - \mathfrak{h}_0) = 0,$$

ou

$$(42\ bis)\qquad \mathfrak{s}_0^2\rho^4 - M\mathfrak{s}_0\rho^2 + N = 0,$$

après avoir posé

$$(41)\qquad \begin{cases} M = e\mathfrak{s}_0 + \mathfrak{h}_0 - 1, \\ N = \mathfrak{s}_0\mathfrak{g}_0 - e\mathfrak{s}_0 - \mathfrak{h}_0. \end{cases}$$

Il s'agit de rechercher directement quelle est la nature

de la conique (Γ). Nous avons déjà remarqué qu'elle ne pouvait jamais être une parabole.

Déterminons le signe de la quantité N lorsqu'on y regarde u, v, w comme les coordonnées d'un plan quelconque. Soient u_1, v_1, w_1 les coordonnées d'un plan tangent à la surface Δ et parallèle au plan (u, v, w); nous aurons alors

(1°) $$u = \varepsilon u_1, \quad v = \varepsilon v_1, \quad w = \varepsilon w_1,$$

et la quantité N (46 *ter*), n° 21, deviendra

$$\begin{aligned} N = {} & \varepsilon^4 (u_1^2 + v_1^2 + w_1^2)(BCu_1^2 + CAv_1^2 + ABw_1^2) \\ & - \varepsilon^2 [(B + C)u_1^2 + (C + A)v_1^2 + (A + B)w_1^2] + 1. \end{aligned}$$

Mais le plan (u_1, v_1, w_1) étant tangent à la surface Δ, on a

$$\begin{aligned} & (u_1^2 + v_1^2 + w_1^2)(BCu_1^2 + CAv_1^2 + ABw_1^2) \\ & \quad = (B + C)u_1^2 + (C + A)v_1^2 + (A + B)w_1^2 - 1, \end{aligned}$$

et, par suite, la quantité N pourra s'écrire

(2°) $$N = (\varepsilon^2 - 1)\left\{\varepsilon^2[(B+C)u_1^2 + (C+A)v_1^2 + (A+B)w_1^2 - 1] - 1\right\}.$$

Or nous avons déjà remarqué (n° 21) que, si le plan (u, v, w) était extérieur à l'ellipsoïde

$$(B + C)u^2 + (C + A)v^2 + (A + B)w^2 - 1 = 0,$$

c'est-à-dire si l'on avait

$$(B + C)u^2 + (C + A)v^2 + (A + B)w^2 - 1 < 0,$$

ce plan ne pourrait pas toucher la surface Δ; comme le plan (u_1, v_1, w_1) est un plan tangent réel à cette surface, on a donc ici

(3°) $$(B + C)u_1^2 + (C + A)v_1^2 + (A + B)w_1^2 - 1 > 0.$$

Lorsque le plan (u, v, w) est extérieur à la surface Δ,

ε est alors inférieur à l'unité, et on peut le supposer aussi petit qu'on voudra en éloignant suffisamment le plan; dans ce cas, on a $N > 0$. Si le plan pénètre dans l'intérieur de la seconde nappe, ε est alors supérieur à l'unité, et on peut le supposer très-grand en rapprochant le plan suffisamment de l'origine; dans ce cas, on a $N > 0$.

De là on conclut que la quantité N sera positive, quand le plan (u, v, w) sera extérieur à la surface Δ ou lorsqu'il pénétrera dans l'intérieur de la nappe inférieure; la quantité N sera négative si le plan passe entre les deux nappes de la surface. Ainsi :

Théorème VIII. — *Lorsque le plan* (u_0, v_0, w_0) *est extérieur à la surface* Δ *ou s'il pénètre dans la nappe inférieure, la conique* (Γ) *correspondante est une* ELLIPSE *imaginaire ou réelle.*

Lorsque le plan (u_0, v_0, w_0) *passe entre les deux nappes de la surface* Δ, *la conique* (Γ) *correspondante est une* HYPERBOLE.

On a une HYPERBOLE ÉQUILATÈRE *lorsque le plan* (u_0, v_0, w_0) *touche l'ellipsoïde*

$$(B + C)u^2 + (C + A)v^2 + (A + B)w^2 - 2 = 0,$$

ou

$$\frac{x^2}{B + C} + \frac{y^2}{C + A} + \frac{z^2}{A + B} - \frac{1}{2} = 0.$$

Ce nouvel ellipsoïde est renfermé entre la sphère (S) *et l'ellipsoïde* (G).

24. Nous résumerons une partie des propriétés précédentes dans la proposition qui suit :

Théorème IX. — 1° *Les plans* $\Pi(u_0, v_0, w_0)$, *pour lesquels la conique* (Γ) *du complexe se réduit à deux points distincts, sont les plans tangents à la surface* Δ,

lieu des points $P(x_0, y_0, z_0)$, *pour lesquels le cône* (C) *du complexe se réduit à deux plans distincts.*

La surface (Δ) *est définie par l'une ou l'autre des équations*

$$(I)\ \begin{cases} (x^2+y^2+z^2)(Ax^2+By^2+Cz^2) \\ \quad -[A(B+C)x^2+B(C+A)y^2+C(A+B)z^2]+ABC=0, \end{cases}$$

$$(II)\ \begin{cases} (u^2+v^2+w^2)(BCu^2+CAv^2+ABw^2) \\ \quad -[(B+C)u^2+(C+A)v^2+(A+B)w^2]+1=0. \end{cases}$$

2° *Les points de la* NAPPE SUPÉRIEURE *de* Δ *sont ceux pour lesquels le cône* (C) *se réduit à deux plans réels, et les plans tangents réels à cette nappe sont ceux pour lesquels la conique* (Γ) *du complexe se réduit à deux points imaginaires.*

Les points de la NAPPE INFÉRIEURE *de* Δ *sont ceux pour lesquels le cône* (C) *du complexe se réduit à deux plans imaginaires, et les plans tangents à cette nappe sont ceux pour lesquels la conique* (Γ) *du complexe se réduit à deux points réels.*

3° *Les plans réels auxquels se réduit le cône du complexe touchent la nappe inférieure de* Δ, *et les plans imaginaires touchent (imaginairement) la nappe supérieure; et, réciproquement, tout plan tangent à la surface* Δ *est un plan d'un des systèmes de plans du complexe.*

Les deux points d'une conique (Γ), *réduite à deux points, appartiennent à la surface* Δ; *et, réciproquement, un point quelconque de la surface* Δ *appartient à un des systèmes de deux points constituant une conique* (Γ) *réduite à deux points.*

4° *Le lieu des milieux des segments (réels ou imaginaires) formés par la conique* (Γ) *du complexe, réduite à deux points, est la podaire de la surface* Δ *relative au centre O de l'ellipsoïde.*

5° *La surface* (Δ) *passe par l'intersection* (*imaginaire*) *de l'ellipsoïde donné avec la sphère lieu des sommets de trièdres trirectangles circonscrits à cet ellipsoïde; elle est inscrite dans la développable circonscrite à l'ellipsoïde donné et au cercle imaginaire de l'infini.*

6° *La surface* (Δ) *est la* SURFACE DES ONDES *relative à l'ellipsoïde directeur*

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} - 1 = 0,$$

c'est-à-dire qu'*on l'obtient en prenant, à partir du centre, sur la perpendiculaire à chaque section centrale, des distances égales aux longueurs des axes de l'ellipse qu'elle détermine.*

Revenons sur les diverses parties de cette proposition fondamentale qui renferme plusieurs propriétés déjà énoncées.

La proposition (1°) a été démontrée aux nos 9 et 22.

Quant à la proposition (2°), une partie se trouve dans le théorème IV, n° 11 ; l'autre partie est une conséquence immédiate du théorème III, n° 23.

Pour la proposition (3°), nous pouvons l'établir ainsi. Soit a un point de la nappe supérieure; le cône du complexe, ayant son sommet en a, se réduit à deux plans; soit Π_0 l'un de ces plans. Puisqu'il y a dans ce plan une infinité de droites qui passent par a, la conique Γ correspondant au plan Π_0 se réduit donc à deux points, et a est un de ces points; il résulte de là que le plan Π_0 touche la nappe inférieure de Δ.

Si maintenant on considère un plan Π_1 tangent à la nappe inférieure de Δ, la conique Γ se réduit à deux points; si a est un de ces points, il y aura une infinité de droites du complexe situées dans ce plan et passant

par a; le cône du complexe, ayant son sommet en a, doit donc se réduire à deux plans; par conséquent, le sommet a appartient à la nappe supérieure, et le plan Π_1 est un plan d'un des systèmes du complexe.

Le même raisonnement est applicable à la nappe inférieure. Plus loin, nous démontrerons toutes ces propriétés par l'analyse.

La proposition (4°) est une conséquence évidente du théorème VI, n° 15.

La première partie de la proposition (5°) résulte de l'équation (21 *bis*), n° 8, et la seconde partie résulte de l'équation (46 *bis*), n° 21.

La proposition (6°) n'est que la reproduction du théorème III, n° 9.

(*La suite prochainement.*)

DES INTERSECTIONS DES FAISCEAUX DE COURBES ET DES FAISCEAUX DE LEURS POLAIRES INCLINÉES;

PAR M. E. DEWULF.

I. Soient $F(x, y) = 0$ et $f(x, y) = 0$ les équations de deux courbes de degré n, $F(x, y) + \lambda f(x, y) = 0$ représente un faisceau de courbes d'ordre n, pivotant autour de n^2 points fixes.

Nous avons nommé (*) *première polaire inclinée* d'un point P, par rapport à une courbe C^n, le lieu des points où toutes les droites issues de P rencontrent la courbe sous un angle constant, et *coefficient d'inclinaison* la tangente k de cet angle.

Les premières polaires inclinées d'un point P, par rap-

(*) *Voir* 1re série, t. XVIII, p. 232.

port aux différentes courbes d'un faisceau $F + \lambda f = 0$, forment un faisceau $\pi + \lambda\varphi = 0$ homographique au premier et de même ordre. Le lieu des intersections des courbes correspondantes de ces deux faisceaux est représenté par l'équation $F\varphi - f\pi = 0$ de degré $2n$. Désignons cette courbe par ψ_k^{2n}, k étant le coefficient d'inclinaison.

II. Soient α, β les coordonnées rectangulaires du point P, le faisceau de ses premières polaires inclinées, par rapport à $F + \lambda f = 0$, a pour équation

$$\begin{gathered}(\beta - y)\left(\frac{dF}{dy} + k\frac{dF}{dx}\right) + (\alpha - x)\left(\frac{dF}{dx} - k\frac{dF}{dy}\right)\\ + \lambda\left[(\beta - y)\left(\frac{df}{dy} + k\frac{df}{dx}\right) + (\alpha - x)\left(\frac{df}{dx} - k\frac{df}{dy}\right)\right] = 0,\end{gathered}$$

et l'équation de ψ_k^{2n} est

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} & f\left\{\frac{dF}{dy}[\beta - y - k(\alpha - x)] + \frac{dF}{dx}[\alpha - x + k(\beta - y)]\right\}\\ & - F\left\{\frac{df}{dy}[\beta - y - k(\alpha - x)] + \frac{df}{dx}[\alpha - x + k(\beta - y)]\right\} = 0.\end{aligned}\right.$$

Cette équation peut aussi être mise sous la forme

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} & (\beta - y)\left[f\left(\frac{dF}{dy} + k\frac{dF}{dx}\right) - F\left(\frac{df}{dy} + k\frac{df}{dx}\right)\right]\\ & + (\alpha - x)\left[f\left(\frac{dF}{dx} - k\frac{dF}{dy}\right) - F\left(\frac{df}{dx} - k\frac{df}{dy}\right)\right] = 0,\end{aligned}\right.$$

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} & f\left[\frac{dF}{dy}(\beta - y) + \frac{dF}{dx}(\alpha - x)\right] - F\left[\frac{df}{dy}(\beta - y) + \frac{df}{dx}(\alpha - x)\right]\\ & + k\left\{f\left[\frac{dF}{dx}(\beta - y) - \frac{dF}{dy}(\alpha - x)\right] - F\left[\frac{df}{dx}(\beta - y) - \frac{df}{dy}(\alpha - x)\right]\right\} = 0.\end{aligned}\right.$$

On conclut de l'équation (1) que, *quelles que soient*

les valeurs α, β et k, la courbe ψ_k^{2n} passe par les n^2 points fixes du faisceau $F + \lambda f = 0$; et de l'équation (2) que, *quelle que soit la valeur de k, la courbe ψ_k^{2n} passe par le point* P.

Cette équation (2) est aussi satisfaite, quelles que soient les valeurs de α, β, si l'on a

$$(a)\quad \begin{cases} f\left(\dfrac{dF}{dy} + k\dfrac{dF}{dx}\right) - F\left(\dfrac{df}{dy} + k\dfrac{df}{dx}\right) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ f\left(\dfrac{dF}{dx} - k\dfrac{dF}{dy}\right) - F\left(\dfrac{df}{dx} - k\dfrac{df}{dy}\right) = 0. \end{cases}$$

Ces équations peuvent s'écrire sous la forme

$$(b)\quad \begin{cases} f\dfrac{dF}{dy} - F\dfrac{df}{dy} = -k\left(f\dfrac{dF}{dx} - F\dfrac{df}{dx}\right), \\ f\dfrac{dF}{dx} - F\dfrac{df}{dx} = +k\left(f\dfrac{dF}{dy} - F\dfrac{df}{dy}\right), \end{cases}$$

qui fait voir qu'elles ne peuvent être satisfaites simultanément pour une même valeur de k que si l'on a

$$(c)\qquad f\frac{dF}{dy} - F\frac{df}{dy} = 0 \quad \text{et} \quad f\frac{dF}{dx} - F\frac{df}{dx} = 0.$$

et alors elles le sont, quelle que soit la valeur de k.

Donc les courbes ψ_k^{2n}, qui correspondent à tous les points du plan de $F + \lambda f = 0$, et pour toutes les valeurs de k, passent par les $(2n-1)^2$ points d'intersection des courbes (c).

Remarquons que ces $(2n-1)^2$ points se trouvent sur la courbe $\dfrac{df}{dy}\dfrac{dF}{dx} - \dfrac{df}{dx}\dfrac{dF}{dy} = 0$ d'ordre $2(n-1)$, qui passe par les points où les courbes $F = 0$ et $f = 0$ se coupent orthogonalement; nous trouverons plus loin la signification précise de ces points.

L'équation (1) est satisfaite aussi si l'on a simultanément

$$F = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dF}{dy}[\beta - y - k(\alpha - x)] + \frac{dF}{dx}[\alpha - x + k(\beta - y)] = 0,$$

ou

$$f = 0 \quad \text{et} \quad \frac{df}{dy}[\beta - y - k(\alpha - x)] + \frac{df}{dx}[\alpha - x + k(\beta - y)] = 0,$$

ou encore

$$\frac{dF}{dy}[\beta - y - k(\alpha - x)] + \frac{dF}{dx}[\alpha - x + k(\beta - y)] = 0$$

et

$$\frac{df}{dy}[\beta - y - k(\alpha - x)] + \frac{df}{dx}[\alpha - x + k(\beta - y)] = 0.$$

c'est-à-dire que la courbe ψ_k^{2n}, qui correspond à un point P, pour une valeur déterminée de k, passe : 1° *par les points d'intersection de* $F = 0$ *et de la première polaire inclinée de* P *par rapport à* F; 2° *par les points d'intersection de* $f = 0$ *et de la première polaire inclinée de* P *par rapport à* f; 3° *par les points d'intersection des premières polaires inclinées de* P *par rapport à* $F = 0$ *et* $f = 0$.

L'équation (3) montre que : *les courbes* ψ_k^{2n}, *qui correspondent à un point donné* P, *forment, pour les valeurs variables de* k, *un faisceau d'ordre* $2n$, *dont les* $4n^2$ *pivots peuvent être déterminés par les courbes* ψ_0^{2n} *et* ψ_∞^{2n} *qui correspondent à* $k = 0$ *et* $k = \infty$.

III. Supposons maintenant que le point P parcoure une droite L dont l'équation est $y = Ax + B$. Nous aurons, entre α et β, la relation $\beta = A\alpha + B$; portons

cette valeur de β dans l'équation (2), nous aurons

$$(d)\quad \left\{\begin{aligned} &\alpha\left\{ \begin{aligned} &\mathrm{A}\left[f\left(\frac{d\mathrm{F}}{dy}+k\frac{d\mathrm{F}}{dx}\right)-\mathrm{F}\left(\frac{df}{dy}+k\frac{df}{dx}\right)\right] \\ &\quad +f\left(\frac{d\mathrm{F}}{dx}-k\frac{d\mathrm{F}}{dy}\right)-\mathrm{F}\left(\frac{df}{dx}-k\frac{df}{dy}\right) \end{aligned}\right\} \\ &+(\mathrm{B}-y)\left[f\left(\frac{d\mathrm{F}}{dy}+k\frac{d\mathrm{F}}{dx}\right)-\mathrm{F}\left(\frac{df}{dy}+k\frac{df}{dx}\right)\right] \\ &\quad -x\left[f\left(\frac{d\mathrm{F}}{dx}-k\frac{d\mathrm{F}}{dy}\right)-\mathrm{F}\left(\frac{df}{dx}-k\frac{df}{dy}\right)\right]=0. \end{aligned}\right.$$

Cette équation est satisfaite, quelle que soit la valeur de α, si l'on pose simultanément

$$(e)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{A}\left[f\left(\frac{d\mathrm{F}}{dy}+k\frac{d\mathrm{F}}{dx}\right)-\mathrm{F}\left(\frac{df}{dy}+k\frac{df}{dx}\right)\right] \\ &\quad +f\left(\frac{d\mathrm{F}}{dx}-k\frac{d\mathrm{F}}{dy}\right)-\mathrm{F}\left(\frac{df}{dx}-k\frac{df}{dy}\right)=0, \end{aligned}\right.$$

$$(f)\quad \left\{\begin{aligned} &(\mathrm{B}-y)\left[f\left(\frac{d\mathrm{F}}{dy}+k\frac{d\mathrm{F}}{dx}\right)-\mathrm{F}\left(\frac{df}{dy}+k\frac{df}{dx}\right)\right] \\ &\quad -x\left[f\left(\frac{d\mathrm{F}}{dx}-k\frac{d\mathrm{F}}{dy}\right)-\mathrm{F}\left(\frac{df}{dx}-k\frac{df}{dy}\right)\right]=0. \end{aligned}\right.$$

Ces courbes se coupent en $2n(2n-1)$ points pour une même valeur de k.

Donc, *si un point* P *parcourt une droite* L, *les courbes* ψ_k^{2n} *correspondantes, pour une valeur constante de* k, *forment un faisceau d'ordre* $2n$ *qui pivote autour de* $2n(2n-1)$ *points fixes.*

Si la droite L passe à l'infini, le nombre des pivots se réduit à $(2n-1)^2$, et ils sont déterminés par les équations

$$(g)\qquad f\left(\frac{d\mathrm{F}}{dy}+k\frac{d\mathrm{F}}{dx}\right)-\mathrm{F}\left(\frac{df}{dy}+k\frac{df}{dx}\right)=0,$$

$$(h)\qquad f\left(\frac{d\mathrm{F}}{dx}-k\frac{d\mathrm{F}}{dy}\right)-\mathrm{F}\left(\frac{df}{dx}-k\frac{df}{dy}\right)=0.$$

Remarquons que les équations (g) et (h) sont précisément les mêmes que les équations (a) ; elles se réduisent donc aux équations (c), et les $(2n-1)^2$ points d'intersection des courbes (c) ne sont autres que les points qui correspondent à la droite de l'infini.

Remarquons encore que les équations (e) et (f) sont satisfaites, quelles que soient les valeurs de A et B, quand les équations (g) et (h) le sont; donc, les $(2n-1)^2$ points qui correspondent à la droite de l'infini sont au nombre des $2n(2n-1)$ points qui correspondent à une droite L.

Mettons les équations (e) et (f) sous la forme

$$\text{A}\left[f\left(\frac{d\text{F}}{dy}+k\frac{d\text{F}}{dx}\right)-\text{F}\left(\frac{df}{dy}+k\frac{df}{dx}\right)\right]$$
$$=-f\left(\frac{d\text{F}}{dx}-k\frac{d\text{F}}{dy}\right)+\text{F}\left(\frac{df}{dx}-k\frac{df}{dy}\right),$$
$$(\text{B}-y)\left[f\left(\frac{d\text{F}}{dy}+k\frac{d\text{F}}{dx}\right)-\text{F}\left(\frac{df}{dy}+k\frac{df}{dx}\right)\right]$$
$$=-x\left[f\left(\frac{d\text{F}}{dx}-k\frac{d\text{F}}{dy}\right)-\text{F}\left(\frac{df}{dx}-k\frac{df}{dy}\right)\right],$$

et divisons-les membre à membre, nous obtiendrons

$$y=\text{A}x+\text{B},$$

c'est l'équation de la droite L; en la combinant avec l'équation (e), elle détermine $2n-1$ points en ligne droite qui appartiennent aux $2n(2n-1)$ points qui correspondent à une droite L.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

Quand un point P *parcourt une droite* L, *les courbes* ψ_k^{2n} *qui correspondent à chaque position de* P *forment un faisceau d'ordre* $2n$ *qui pivote autour de* $2n(2n-1)$ *points fixes, savoir : les* $(2n-1)^2$ *points qui correspon-*

dent à la droite de l'infini, et $2n-1$ *points situés sur la droite* L *qui passent à l'infini avec cette droite.*

Des déductions du paragraphe II nous pouvons aussi conclure que

Toutes les courbes ψ_k^{2n} *qui correspondent à tous les points du plan du faisceau* $F+\lambda f=0$, *et pour toutes les valeurs de* k, *se coupent en* $n^2+(2n-1)^2$ *points fixes qui sont : les* $(2n-1)^2$ *points qui correspondent à la droite de l'infini, et les* n^2 *pivots du faisceau* $F+\lambda f=0$.

Voyons maintenant ce que deviennent les $2n(2n-1)$ points fixes qui correspondent à L pour une valeur donnée de k, quand k varie de $+\infty$ à $-\infty$. Pour cela, éliminons k entre les équations (e) et (f); nous obtenons

$$(Ax+B-y)\left[\left(f\frac{dF}{dy}-F\frac{dx}{df}\right)^2+\left(f\frac{dF}{dx}-F\frac{df}{dy}\right)^2\right]=0,$$

qui se décompose en

$$y=Ax+B \quad \text{et} \quad \frac{dF}{dy}\frac{df}{dx}-\frac{dF}{dx}\frac{df}{dy}=0.$$

Donc, *quand le coefficient* k *varie de* $+\infty$ *à* $-\infty$, $2n-1$ *des points fixes qui correspondent à* L, *décrivent la droite* L, *et les* $(2n-1)^2$ *autres points qui correspondent à* L *décrivent la courbe* $\frac{dF}{dy}\frac{df}{dx}-\frac{dF}{dx}\frac{df}{dy}=0$.

Supposons que le point P parcoure une courbe

$$M(x,y)=0,$$

et cherchons l'enveloppe des courbes ψ_k^{2n} correspondantes à chacune des positions de P, k restant constant.

Nous avons

$$(1) \qquad M(\alpha, \beta) = 0,$$

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\beta - y)\left[f\left(\frac{dF}{dy} + k\frac{dF}{dx}\right) - F\left(\frac{df}{dy} + k\frac{df}{dx}\right)\right] \\ + (\alpha - x)\left[f\left(\frac{dF}{dx} - k\frac{dF}{dy}\right) - F\left(\frac{df}{dx} - k\frac{df}{dy}\right)\right] = 0, \end{array} \right.$$

$$(3) \qquad \frac{dM}{d\alpha} + \frac{dM}{d\beta}\frac{d\beta}{d\alpha} = 0,$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\beta}{d\alpha}\left[f\left(\frac{dF}{dy} + k\frac{dF}{dx}\right) - F\left(\frac{df}{dy} + k\frac{df}{dx}\right)\right] \\ + f\left(\frac{dF}{dx} - k\frac{dF}{dy}\right) - F\left(\frac{df}{dx} + k\frac{df}{dy}\right) = 0. \end{array} \right.$$

Éliminant $\frac{d\beta}{d\alpha}$ entre (3) et (4), et combinant la résultante avec (2), nous trouvons

$$(5) \qquad (\beta - y)\frac{dM}{d\beta} + (\alpha - x)\frac{dM}{d\alpha} = 0.$$

Pour obtenir l'enveloppe, il faut éliminer α et β entre les équations (1), (2) et (5).

Cherchons aussi le lieu des $2n(2n-1)$ points qui correspondent à une tangente à $M(x, y) = 0$, quand cette tangente roule autour de la courbe.

x', y' étant les coordonnées d'un point de M, l'équation de la tangente en ce point est

$$(y - y')\frac{dM}{dy'} + (x - x')\frac{dM}{dx'} = 0.$$

Dans les équations (e) et (f) qui déterminent les $2n(2n-1)$ points qui correspondent à une droite, rem-

placons A par $-\dfrac{\dfrac{dM}{dx'}}{\dfrac{dM}{dy'}}$ et B par $y' + x'\dfrac{\dfrac{dM}{dx'}}{\dfrac{dM}{dy'}}$ nous trouvons :

$$(6) \qquad (y-y')\frac{dM}{dy'} + (x-x')\frac{dM}{dx'} = 0,$$

$$(7) \left\{ \begin{aligned} &(y-y')\left[f\left(\frac{dF}{dy} + k\frac{dF}{dx}\right) - F\left(\frac{df}{dy} + k\frac{df}{dx}\right)\right] \\ &+ (x-x')\left[f\left(\frac{dF}{dx} - k\frac{dF}{dy}\right) - F\left(\frac{df}{dx} - k\frac{df}{dy}\right)\right] = 0. \end{aligned} \right.$$

Pour trouver le lieu cherché, il faut éliminer y' et x' entre les équations (6), (7) et $M(x', y') = 0$.

Or ces équations sont exactement les mêmes que les équations (1), (2), (5).

Donc *l'enveloppe des courbes* ψ_k^{2n} *qui correspondent aux points d'une courbe* M *est la même courbe que le lieu décrit par les* $2n(2n-1)$ *points fixes des faisceaux qui correspondent aux tangentes à* M.

DE LA RÉALITÉ DES RACINES DE L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ EN S :

$$\Delta = \begin{vmatrix} A-S & B'' & B' \\ B'' & A'-S & B \\ B' & B & A''-S \end{vmatrix} = 0,$$

où B, B', B'' représentent des quantités différentes de zéro.

On a, en multipliant par B, B', B'' les éléments des lignes horizontales,

$$\Delta BB'B'' = \begin{vmatrix} (A-S)B & BB'' & BB' \\ B'B'' & (A'-S)B' & BB' \\ B'B'' & BB'' & (A''-S)B'' \end{vmatrix};$$

d'où

$$\Delta BB'B'' = \begin{vmatrix} (A-S)B - B'B'' & BB'' - (A'-S)B' & 0 \\ 0 & (A'-S)B' - BB'' & BB' - (A''-S)B'' \\ B'B'' & BB'' & (A''-S)B'' - BB' + BB' \end{vmatrix};$$

et, en divisant respectivement par B, B′, B″ les éléments des colonnes de rangs 1, 2, 3 de ce dernier déterminant,

$$\Delta = \begin{vmatrix} (A-S) - \frac{B'B''}{B} & \frac{BB''}{B'} - (A'-S) & 0 \\ 0 & (A'-S) - \frac{BB''}{B'} & \frac{BB'}{B''} - (A''-S) \\ \frac{B'B''}{B} & \frac{BB''}{B'} & (A''-S) - \frac{BB'}{B''} + \frac{BB'}{B''} \end{vmatrix}.$$

En posant

$$A - \frac{B'B''}{B} = a, \quad A' - \frac{BB''}{B'} = a', \quad A'' - \frac{BB'}{B''} = a'',$$

il vient

$$(1) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a - S & S - a' & 0 \\ 0 & a' - S & S - a'' \\ \frac{B'B''}{B} & \frac{BB''}{B'} & a'' - S + \frac{BB'}{B''} \end{vmatrix}.$$

Actuellement, supposons que les quantités a, a', a'' soient inégales et qu'on ait, par exemple, $a < a' < a''$.

Si l'on remplace successivement S par a, a', a'', les valeurs correspondantes de Δ, données par l'égalité (1), seront :

$$\frac{B'B''}{B}(a-a')(a-a''), \qquad -\frac{BB''}{B'}(a-a')(a'-a''), \qquad \frac{BB'}{B''}(a-a'')(a'-a''),$$

ou

$$\frac{BB'B''}{B^2}(a-a')(a-a''), \quad -\frac{BB'B''}{B'^2}(a-a')(a'-a''), \quad \frac{BB'B''}{B''^2}(a-a'')(a'-a''),$$

et, comme les produits $(a-a')(a-a'')$, $(a-a')(a'-a'')$, $(a-a'')(a'-a'')$ sont positifs, on voit que les substitutions de a et a' à S dans Δ donnent des résultats de signes contraires, et qu'il en est de même des substitutions de a' et a''; par conséquent, l'équation $\Delta = 0$ a une racine comprise entre a et a', et une autre racine comprise entre a' et a''.

En outre, pour $S = -\infty$, $\Delta = +\infty$, et pour $S = +\infty$, $\Delta = -\infty$; donc, suivant que le produit $BB'B''$ est positif ou négatif, la troisième racine de l'équation $\Delta = 0$ est plus grande que a'' ou plus petite que a.

Ainsi, dans l'hypothèse de l'inégalité des quantités a, a', a'', les trois racines de l'équation $\Delta = 0$ sont réelles et inégales.

Si deux des quantités a, a', a'' étaient égales entre elles, et qu'on eût, par exemple, $a = a'$, l'égalité (1) deviendrait

$$\Delta = (a-S)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & a-S & S-a'' \\ \frac{B'B''}{B} & \frac{BB''}{B'} & (a''-S)+\frac{BB'}{B''} \end{vmatrix};$$

l'une des racines de l'équation $\Delta = 0$ serait a, et les deux autres seraient données par la résolution de l'équation du second degré

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & a-S & S-a'' \\ \frac{B'B''}{B} & \frac{BB''}{B'} & (a''-S)+\frac{BB'}{B''} \end{vmatrix} = 0.$$

En remplaçant successivement l'inconnue S par a et a'', le premier membre de l'équation (2) prend les valeurs

$$-\left(\frac{BB''}{B'}+\frac{B'B''}{B}\right)(a-a''),\quad +\frac{BB'}{B''}(a-a''),$$

ou

$$-BB'B''\left(\frac{1}{B'^2}+\frac{1}{B^2}\right)(a-a''),\quad +BB'B''\frac{1}{B''^2}(a-a''),$$

qui ont des signes contraires. Donc cette équation a une racine comprise entre a et a''. L'autre racine est plus grande que a'', ou moindre que a, suivant que $BB'B''$ est positif ou négatif.

Donc, dans ce second cas, l'équation $\Delta=0$ a encore ses trois racines réelles et inégales.

Enfin, lorsque $a=a'=a''$, l'égalité (1) prend la forme

$$\Delta=(a-S)^2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ \frac{B'B''}{B} & \frac{BB''}{B'} & (a-S)+\frac{BB'}{B''} \end{vmatrix}.$$

L'équation proposée $\Delta=0$ a deux racines égales à a, et la troisième, déterminée par l'équation du premier degré

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ \frac{B'B''}{B} & \frac{BB''}{B'} & (a-S)+\frac{BB'}{B''} \end{vmatrix}=0,$$

a pour valeur $a+\frac{B'B''}{B}+\frac{BB''}{B'}+\frac{BB'}{B''}$.

Il en faut conclure que, dans tous les cas, l'équation proposée $\Delta=0$ a ses trois racines réelles. G.

SUR LES PERMUTATIONS CIRCULAIRES DISTINCTES;

Par M. C. MOREAU,
Capitaine d'Artillerie, à Constantine.

Désignons respectivement par P_s^r et par P_s^c les permutations rectilignes et circulaires de S lettres, et par l'abréviation $k!$ le produit $1.2.3\ldots k$. Si les S lettres sont toutes différentes, on a, comme on le sait,

$$P_s^r = S! \quad \text{et} \quad P_s^c = (S-1)!$$

Cette dernière formule tient à ce que chaque permutation circulaire, pouvant être ouverte à chacune des lettres qui la composent, donne naissance à S permutations rectilignes différentes, et que par suite

$$SP_s^c = P_s^r.$$

Supposons maintenant que les S lettres ne soient pas toutes différentes et que A, B, C,..., L représentent respectivement les nombres des lettres $a, b, c,\ldots, l$ qui entrent dans chaque permutation, ayant d'ailleurs

$$A + B + C + \ldots + L = S;$$

dans ce cas,

$$P_s^r = \frac{S!}{A!B!C!\ldots L!}.$$

Quant aux permutations circulaires, si les nombres A, B, C,..., L n'ont aucun diviseur commun, on aura encore, par la raison déjà donnée,

$$SP_s^c = P_s^r.$$

Mais, si les nombres A, B, C,..., L ont des diviseurs

communs, il n'en sera plus ainsi, parce que, parmi les P_s^c permutations circulaires distinctes de ces S lettres, il s'en trouvera qui pourront se décomposer en groupes égaux et qui, à cause de cela, ne donneront pas naissance chacune à S permutations rectilignes différentes.

Soit donc d le plus grand commun diviseur des nombres A, B, C, ..., L; supposons $S = sd$, et que, décomposé en ses facteurs premiers, on ait

$$d = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \ldots p_n^{\alpha_n}.$$

Désignons encore respectivement par $P^r_{\frac{s}{\delta}}$ et $P^c_{\frac{s}{\delta}}$, δ étant un diviseur de d, les permutations rectilignes et circulaires distinctes de $\frac{S}{\delta}$ lettres avec $\frac{A}{\delta} + \frac{B}{\delta} + \frac{C}{\delta} + \ldots + \frac{L}{\delta} = \frac{S}{\delta}$, de façon que $P^r_{\frac{s}{\delta}} = \dfrac{\frac{S}{\delta}!}{\frac{A}{\delta}!\,\frac{B}{\delta}!\ldots\frac{L}{\delta}!}$.

Cela posé, les permutations rectilignes ou circulaires distinctes des S lettres considérées comprennent :

1° Des permutations qui ne peuvent pas se décomposer en groupes égaux et dont nous désignons le nombre par X_s;

2° Des permutations qui peuvent se décomposer en $p_1, p_2, p_3, \ldots$ ou p_n groupes égaux, en $p_1p_2, p_1p_3, \ldots$ ou $p_{n-1}p_n$ groupes égaux....

Or, en supprimant pour le moment les indices supérieurs, les nombres de ces dernières permutations sont respectivement

$$P_{\frac{s}{p_1}},\quad P_{\frac{s}{p_2}},\ldots,\quad P_{\frac{s}{p_n}},$$
$$P_{\frac{s}{p_1p_2}},\quad P_{\frac{s}{p_1p_3}},\ldots,\quad P_{\frac{s}{p_{n-1}p_n}},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

et l'on voit, par un raisonnement très-simple et très-connu, que l'on a

$$X_s = P_s - \Sigma P_{\frac{s}{p_1}} + \Sigma P_{\frac{s}{p_1 p_2}} - \Sigma P_{\frac{s}{p_1 p_2 p_3}} + \ldots \pm P_{\frac{s}{p_1 p_2 p_3 \ldots p_n}},$$

les sommes Σ se rapportant aux combinaisons 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3,..., n à n des nombres premiers $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Au surplus, et pour enlever tout doute à cet égard, s'il pouvait en exister, l'exactitude successive des termes de cette formule tient à l'égalité évidente

$$-\frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \ldots \pm 1 = -1.$$

Maintenant chacune des X_s^c permutations circulaires restantes donne naissance à S des X_s^r permutations rectilignes restantes, puisque toutes celles qui peuvent se décomposer en groupes égaux ont été écartées, et il en résulte

$$SX_s^c = X_s^r,$$

équation de laquelle nous allons déduire la valeur cherchée de P_s^c.

Pour cela, mettons en évidence les exposants α_1, α_2, $\alpha_3, \ldots, \alpha_n$, c'est-à-dire posons

$$P_s = P_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}, \qquad P_{\frac{s}{p_1}} = P_{\alpha_1 - 1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n},$$

$$P_{\frac{s}{p_1 p_2}} = P_{\alpha_1 - 1, \alpha_2 - 1, \alpha_3, \ldots, \alpha_n}, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$P_{\frac{s}{p_1 p_2 \ldots p_n}} = P_{\alpha_1 - 1, \alpha_2 - 1, \ldots, \alpha_n - 1}:$$

la valeur de X_s deviendra

$$X_s = P_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} - \Sigma P_{\alpha_1 - 1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n} + \Sigma P_{\alpha_1 - 1, \alpha_2 - 1, \ldots, \alpha_n} + \ldots \pm P_{\alpha_1 - 1, \ldots, \alpha_n - 1}.$$

Considérons maintenant les fonctions génératrices de

P^r et de P^c, c'est-à-dire deux fonctions des variables auxiliaires $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$,

$$f_r(t_1, t_2, \ldots, t_n) \quad \text{et} \quad f_c(t_1, t_2, \ldots, t_n),$$

telles que dans leurs développements, suivant les puissances entières et positives de $t_1, t_2, \ldots, t_n$, les termes en $t_1^{k_1}.t_2^{k_2}\ldots t_n^{k_n}$ aient respectivement pour coefficients $P^r_{k_1,k_2,\ldots,k_n}$ et $P^c_{k_1,k_2,\ldots,k_n}$, il est clair que, d'après cette définition, X^r_s et X^c_s seront les coefficients de $t_1^{\alpha_1}.t_2^{\alpha_2}\ldots t_n^{\alpha_n}$ dans les développements des fonctions

$$f_r(t_1, t_2, \ldots, t_n)(1 - \Sigma t_1 + \Sigma t_1 t_2 - \ldots \pm t_1 t_2 \ldots t_n)$$

et

$$f_c(t_1, t_2, \ldots, t_n)(1 - \Sigma t_1 + \Sigma t_1 t_2 - \ldots \pm t_1 t_2 \ldots t_n),$$

ou, ce qui revient au même, de

$$f_r(t_1, t_2, \ldots, t_n)(1 - t_1)(1 - t_2)\ldots(1 - t_n)$$

et

$$f_c(t_1, t_2, \ldots, t_n)(1 - t_1)(1 - t_2)\ldots(1 - t_n),$$

et que, à cause de $S = sp_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_n^{\alpha_n}$, si, dans cette dernière fonction, on remplace t_1 par $p_1 t_1$, t_2 par $p_2 t_2, \ldots$ et t_n par $p_n t_n$, SX^c_s sera le coefficient de $t_1^{\alpha_1}.t_2^{\alpha_2}\ldots t_n^{\alpha_n}$ dans le développement de

$$sf_c(p_1 t_1, p_2 t_2, \ldots, p_n t_n)(1 - p_1 t_1)(1 - p_2 t_2)\ldots(1 - p_n t_n).$$

Cela posé, comme l'équation

$$SX^c_s = X^r_s$$

est générale et a été établie en dehors de toute hypothèse particulière faite sur les valeurs des nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ et n, il en résulte que l'on peut écrire

$$\begin{aligned} &sf_c(p_1 t_1, \ldots, p_n t_n)(1 - p_1 t_1)\ldots(1 - p_n t_n) \\ &= f_r(t_1, \ldots, t_n)(1 - t_1)\ldots(1 - t_n), \end{aligned}$$

puisque, dans les développements de ces deux fonctions, les coefficients des termes semblables sont égaux. On aura donc enfin

$$sf_c(p_1t_1, p_2t_2, \ldots, p_nt_n)$$
$$= f_r(t_1, t_2, \ldots, t_n)\frac{(1-t_1)(1-t_2)\ldots(1-t_n)}{(1-p_1t_1)(1-p_2t_2)\ldots(1-p_nt_n)},$$

et il ne reste plus qu'à égaler dans les deux membres de cette équation les coefficients de $t_1^{\alpha_1}.t_2^{\alpha_2}.t_3^{\alpha_3}\ldots t_n^{\alpha_n}$.

Dans le premier membre, ce coefficient est

$$sp_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_n^{\alpha_n}\mathrm{P}^c_{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} = \mathrm{SP}^c_s,$$

et, en remarquant que le coefficient de $t_1^{k_1}t_2^{k_2}\ldots t_n^{k_n}$ dans le développement de la fonction $\frac{(1-t_1)(1-t_2)\ldots(1-t_n)}{(1-p_1t_1)(1-p_2t_2)\ldots(1-p_nt_n)}$ est égal à $p_1^{k_1}\left(1-\frac{1}{p_1}\right)$, $p_2^{k_2}\left(1-\frac{1}{p_2}\right), \ldots$, $p_n^{k_n}\left(1-\frac{1}{p_n}\right)$, on voit que celui de $t_1^{\alpha_1}t_2^{\alpha_2}\ldots t_n^{\alpha_n}$, dans le développement du second membre, sera la somme d'un certain nombre de termes de la forme

$$p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots p_n^{k_n}\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_n}\right)\mathrm{P}^r_{\alpha_1-k_1,\ldots,\alpha_n-k_n}.$$

Or $p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots p_n^{k_n}$ est un diviseur quelconque δ de d,

$$p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots p_n^{k_n}\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_n}\right) = \varphi(\delta)$$

représente combien il y a de nombres inférieurs à δ et premiers avec lui, et $\mathrm{P}^r_{\alpha_1-k_1,\ldots,\alpha_n-k_n} = \mathrm{P}^r_{\frac{s}{\delta}}$; donc on aura

$$\mathrm{SP}^c_s = \Sigma\varphi(\delta)\mathrm{P}^r_{\frac{s}{\delta}},$$

la somme Σ s'étendant à tous les diviseurs δ du plus grand commun diviseur d, y compris 1 et d, $\varphi(\delta)$ ayant

la signification usuelle indiquée plus haut et $P^r_{\frac{s}{\delta}}$ étant le nombre des permutations rectilignes distinctes de $\frac{S}{\delta}$ lettres, c'est-à-dire $\dfrac{\frac{S}{\delta}!}{\frac{A}{\delta}!\frac{B}{\delta}!\cdots\frac{L}{\delta}!}$.

La valeur de P^c_s est donc

$$P^c_s = \frac{1}{S}\sum \varphi(\delta) P^r_{\frac{s}{\delta}} = \sum \frac{\varphi(\delta)}{\delta}\,\frac{P^r_{\frac{s}{\delta}}}{\frac{S}{\delta}}.$$

Ainsi, si $1, \delta_1, \delta_2, \ldots, d$ sont les différents diviseurs de d, on aura

$$P^c_s = \frac{(S-1)!}{A!B!\ldots L!} + \frac{\varphi(\delta_1)}{\delta_1}\,\frac{\left(\frac{S}{\delta_1}-1\right)!}{\frac{A}{\delta_1}!\cdots\frac{L}{\delta_1}!} + \ldots + \frac{\varphi(d)}{d}\,\frac{\left(\frac{S}{d}-1\right)!}{\frac{A}{d}!\frac{B}{d}!\cdots\frac{L}{d}!}:$$

telle est la formule que nous nous proposions de trouver.

THÉORÈME D'ARITHMÉTIQUE;

PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ.

THÉORÈME. — *Si l'on désigne par a et n deux nombres entiers quelconques supérieurs à l'unité, le quotient*

$$\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(na-1)}{a^n}$$

est fractionnaire si a est premier, entier si a n'est pas premier.

Pour établir ce théorème, nous distinguons deux cas, suivant que a est premier ou ne l'est pas.

1° L'entier a est premier. Désignons par x le nombre qui exprime combien de fois a entre comme facteur au numérateur. Ce nombre est, comme on sait, donné par la formule

$$x = \left(\frac{na-1}{a}\right) + \left(\frac{na-1}{a^2}\right) + \left(\frac{na-1}{a^3}\right) + \ldots$$
$$- \left(\frac{n-1}{a}\right) - \left(\frac{n-1}{a^2}\right) - \ldots,$$

dans laquelle chaque parenthèse représente la partie entière du quotient qu'elle renferme.

Or on a évidemment

$$\left(\frac{na-1}{a^2}\right) = \left(\frac{n-1}{a}\right),$$
$$\left(\frac{na-1}{a^3}\right) = \left(\frac{n-1}{a^2}\right),$$
$$\left(\frac{na-1}{a^4}\right) = \left(\frac{n-1}{a^3}\right),$$

et ainsi de suite.

Donc la formule qui donne x se réduit à

$$x = \left(\frac{na-1}{a}\right),$$

ce qui donne

$$x = n-1.$$

Ainsi le facteur a entre $n-1$ fois au numérateur. Il entre n fois, c'est-à-dire une fois de plus, au dénominateur. Donc le quotient est fractionnaire, et la première partie du théorème est démontrée.

2° Le nombre a n'est pas premier. Pour démontrer que, dans ce cas, le quotient est entier, nous allons

prouver que tout facteur premier de a entre alors au numérateur autant de fois au moins qu'au dénominateur.

Soit b l'un quelconque des facteurs premiers de a, et β son exposant. Nous aurons

$$a = b^\beta q,$$

et b entrera βn fois au dénominateur.

Au numérateur, ce facteur b entrera un nombre de fois y donné par la formule

$$\begin{aligned} y = & \left(\frac{nb^\beta q - 1}{b}\right) + \left(\frac{nb^\beta q - 1}{b^2}\right) + \ldots \\ & + \left(\frac{nb^\beta q - 1}{b^{\beta+1}}\right) + \left(\frac{nb^\beta q - 1}{b^{\beta+2}}\right) + \ldots \\ & - \left(\frac{n-1}{b}\right) - \left(\frac{n-1}{b^2}\right) - \ldots \end{aligned}$$

Or on a évidemment

$$\left(\frac{nb^\beta q - 1}{b^{\beta+1}}\right) \geq \left(\frac{n-1}{b}\right),$$

$$\left(\frac{nb^\beta q - 1}{b^{\beta+2}}\right) \geq \left(\frac{n-1}{b^2}\right),$$

$$\left(\frac{nb^\beta q - 1}{b^{\beta+3}}\right) \geq \left(\frac{n-1}{b^3}\right),$$

et ainsi de suite.

Donc la formule qui donne y se réduit à

$$y \geq \left(\frac{nb^\beta q - 1}{b}\right) + \left(\frac{nb^\beta q - 1}{b^2}\right) + \ldots + \left(\frac{nb^\beta q - 1}{b^\beta}\right);$$

d'où l'on tire

$$y \geq nb^{\beta-1}q - 1 + nb^{\beta-2}q - 1 + \ldots + nq - 1,$$

et, par suite,

$$y \geq nq\,\frac{b^\beta - 1}{b - 1} - \beta.$$

Il suffit donc, pour établir la seconde partie du théorème, de vérifier que l'inégalité

$$nq\,\frac{b^\beta - 1}{b - 1} - \beta \geq \beta n$$

est toujours satisfaite lorsque a et n sont supérieurs à l'unité.

Pour faire cette vérification, nous distinguerons deux cas, suivant que β sera égal ou supérieur à l'unité.

Si l'on a $\beta = 1$, l'inégalité se réduit à

$$nq - 1 \geq n,$$

ou bien à

$$q \geq 1 + \frac{1}{n}.$$

Il suffit que q soit supérieur à l'unité. Or il en est forcément ainsi; car, pour que q fût égal à 1 en même temps que β, il faudrait que a fût premier, ce qui est contraire à l'hypothèse actuelle.

Si l'on a $\beta > 1$, l'inégalité peut s'écrire

$$nq\,(b^\beta - 1) \geq (n + 1)(b - 1)\beta,$$

ou bien, en posant $b = 1 + c$ (ce qui suppose c entier et supérieur à zéro),

$$nq\,[(1 + c)^\beta - 1] \geq (n + 1)\,\beta c.$$

Développons $(1 + c)^\beta$, et divisons les deux membres par c; nous trouvons

$$nq\left[\beta + \frac{\beta(\beta - 1)}{1.2}\,c + \ldots\right] \geq n\beta + \beta,$$

ou bien

$$nq\beta + nq\,\frac{\beta(\beta - 1)}{1.2}\,c + \ldots \geq n\beta + \beta.$$

Or on a évidemment toujours

$$nq\beta \geq n\beta.$$

De plus, puisque β et n sont tous deux supérieurs à l'unité, on a aussi

$$nq\,\frac{\beta(\beta-1)}{1.2}\,c \geq \beta.$$

Donc l'inégalité qui précède est satisfaite, et la seconde partie du théorème est démontrée.

Remarque. — Il n'y a, dans la démonstration précédente, qu'un seul point où nous ayons eu besoin de supposer $n > 1$. Tout le reste subsiste donc pour $n = 1$. Quant au point considéré, il revient à démontrer que, pour $\beta > 1$, l'on a

$$nq\,\frac{\beta(\beta-1)}{1.2}\,c \geq \beta,$$

ou bien

$$nq(\beta-1)c \geq 2.$$

Si l'on suppose $n = 1$, cette inégalité se réduit à celle-ci

$$q(\beta-1)c \geq 2,$$

qui est toujours satisfaite, excepté dans le cas unique où l'on a en même temps

$$\beta = 2,$$

et

$$n = q = c = 1.$$

Ce cas unique correspond au quotient

$$\frac{1.2.3}{4},$$

qui forme une exception à la seconde partie du théorème lorsqu'on étend celui-ci au cas de $n = 1$.

Donc, en résumé, le quotient

$$\frac{1.2.3...(a-1)}{a},$$

qui correspond au cas où $n=1$, est fractionnaire lorsque a est premier, entier lorsque a n'est pas premier, excepté dans le cas unique où $a=4$; et, à cette exception près, le théorème qui fait l'objet de cet article subsiste lorsque $n=1$.

RECHERCHES ANALYTIQUES

sur la surface du troisième ordre qui est la réciproque de la surface de Steiner;

Par M. LAGUERRE.

I. — *Détermination des lignes asymptotiques de la surface* (*).

1. La théorie de cette surface se rattache intimement, comme je me propose de le faire voir dans cette Note, à la théorie des formes biquadratiques simultanées.

Soient a, b, c, d et e cinq fonctions linéaires des coordonnées cartésiennes x, y et z, nous pouvons considérer les valeurs que prennent ces fonctions en un point de l'espace comme les coordonnées (pentaédriques) de ce point; il est clair d'ailleurs qu'entre ces coordonnées d'un

---

(*) Les lignes asymptotiques de la surface de Steiner (qui sont réciproques des lignes que nous étudions ici) ont été trouvées pour la première fois par M. Clebsch. (*Journal de Borchardt*, t. 68, p. 1.)

Sur la relation qui a lieu entre les lignes asymptotiques d'une surface et celles de la réciproque, *voir* une Note de M. Mannheim (*Bulletin des Sciences mathématiques*, t. I, p. 198).

point existe une relation linéaire, satisfaite identiquement, et que je mettrai sous la forme

$$(1) \qquad a\varepsilon - 4b\delta + 6c\gamma - 4d\beta + e\alpha = 0,$$

α, β, γ, δ et ε désignant des constantes numériques que je rattacherai au polynôme du quatrième degré

$$\omega = \alpha t^4 + 4\beta t^3 + 6\gamma t^2 + 4\delta t + \varepsilon;$$

en posant

$$u = at^4 + 4bt^3 + 6ct^2 + 4dt + e,$$

on voit que la relation précédente exprime que l'invariant quadratique simultané des formes u et ω est égal à zéro.

2. L'équation $u = 0$ (*), si l'on y considère t comme un paramètre variable, représente un plan mobile qui enveloppe une surface du sixième ordre, dont l'équation est

$$(2) \qquad i^3 - 27j^2 = 0,$$

si l'on représente respectivement par i et par j l'invariant quadratique et l'invariant cubique de la forme u. Les équations de son arête de rebroussement sont

$$i = 0 \quad \text{et} \quad j = 0.$$

La surface que je me propose d'étudier est la surface du troisième ordre $\mathcal{H}$, dont l'équation est

$$j = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix} = 0.$$

(*) *Voir* Cayley : *On a certain sextic developpable* (*Quarterly Journal*, t. IX); *Note sur quelques tores sextiques* (*Annali di Matematica*, 2e série, t. II).

Si l'on désigne par $\mathcal{S}$ la surface du second ordre (ou quadrique) représentée par l'équation

$$i = ae - 4bd + 3c^2 = 0,$$

on voit, en considérant l'équation (2), que la surface développable dont j'ai parlé plus haut touche $\mathcal{X}$ tout le long de l'intersection de cette surface avec $\mathcal{S}$, c'est-à-dire tout le long de son arête de rebroussement.

D'où la conséquence suivante :

La cubique $\mathcal{X}$ est coupée par la quadrique $\mathcal{S}$ suivant une de ses lignes asymptotiques.

3. Il est facile de voir qu'en réalité les considérations précédentes nous conduisent à la détermination complète des lignes asymptotiques de $\mathcal{X}$.

Considérons le système linéaire numérique

$$\begin{matrix} p & q & r \\ p' & q' & r', \\ p'' & q'' & r'' \end{matrix}$$

dont, pour plus de simplicité, je supposerai le déterminant égal à l'unité, et le système composé suivant

$$\begin{matrix} p & p' & p'' \\ q & q' & q'' \\ r & r' & r'' \end{matrix} \times \begin{matrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{matrix} \times \begin{matrix} p & q & r \\ p' & q' & r' \\ p'' & q'' & r'' \end{matrix} = \begin{matrix} a' & b' & c' \\ b' & c'' & d'. \\ c' & d' & c' \end{matrix}$$

Si l'on choisit les nombres $p, q, r, \ldots$ de telle sorte que l'on ait $c'' = c'$, il est clair que l'on aura

$$\begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ b' & c' & d' \\ c' & d' & e' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix},$$

et l'équation de $\mathcal{X}$ s'obtiendra en égalant à zéro l'une

ou l'autre de ces deux expressions ; mais l'on n'aura pas en général

$$a'e' - 4b'd' + 3c'^2 = ae - 4bd + 3c^2,$$

c'est-à-dire

$$i' = i.$$

L'équation $i' = 0$ représentera donc une nouvelle quadrique coupant $\mathfrak{X}$ suivant une de ses lignes asymptotiques, et la question qui s'offre à nous est la suivante :

Les nombres $p, q, r, \ldots$ étant choisis de telle sorte que la relation $c'' = c'$ soit satisfaite, trouver les différentes valeurs que peut prendre l'expression

$$i' = a'e' - 4b'd' + 3c'^2.$$

4. J'emploierai dans la suite de ce chapitre les notations dont je me suis servi dans mon Mémoire sur le calcul des systèmes linéaires (*) ; une grande lettre représentera un système linéaire, la même lettre affectée de l'indice zéro ou de l'indice 1 le système réciproque ou

---

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, t. XXV.

Pour éclaircir ces notations par quelques exemples, soit

$$A = \begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{matrix}$$

et a la valeur du déterminant de ce système linéaire ; on aura

$$A_1 = \begin{matrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{matrix} \quad \text{et} \quad A_0 = \begin{matrix} \frac{da}{d\alpha} & \frac{da}{d\alpha'} & \frac{da}{d\alpha''} \\ \frac{da}{d\beta} & \frac{da}{d\beta'} & \frac{da}{d\beta''} \\ \frac{da}{d\gamma} & \frac{da}{d\gamma'} & \frac{da}{d\gamma''} \end{matrix};$$

d'où, par suite,

$$A_0 A = a = \Delta(A).$$

le système inverse, et la caractéristique Δ la valeur du déterminant du système linéaire qu'elle précède.

Cela posé, en calculant les quantités c'' et c', on trouve que, pour qu'elles soient égales, on doit avoir la relation

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} & pra + (pr' + rp')b + (pr'' + rp'' + r'p')c \\ & \quad + (p'r'' + r'p'')d + p''r''e \\ & = q^2a + 2qq'b + (2qq'' + q'^2)c \\ & \quad + 2q'q''d + q''^2e; \end{aligned}\right.$$

cette relation doit être identique et elle ne peut différer que dans la forme de la relation (1). On en déduit, ρ désignant une certaine quantité numérique, la série d'égalités

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{2} & = \frac{pr - q^2}{\varepsilon} = \frac{pr' + rp' - 2qq'}{-4\delta} \\ & = \frac{pr'' + rp'' + p'r' - 2qq'' - q'^2}{6\gamma} = \frac{p'r'' + r'p'' - 2q'q''}{-4\beta} \\ & = \frac{p''r'' - q''^2}{\alpha}. \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$\mathrm{I} = \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{matrix} \varepsilon & -2\delta & \gamma \\ -2\delta & 4\gamma & -2\beta \\ \gamma & -2\beta & \alpha \end{matrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{H} = \begin{matrix} p & q & r \\ p' & q' & r' \\ p'' & q'' & r'' \end{matrix},$$

on déduit facilement des égalités précédentes l'équation

$$(4)\qquad \mathrm{HIH}_1 = \rho\mathcal{A} + \theta\mathrm{I},$$

θ désignant une autre quantité numérique dont il est inutile d'écrire la valeur.

Réciproquement, si le système H est choisi de telle manière que le produit HIH_1 soit de la forme $\rho\mathcal{A} + \theta\mathrm{I}$, ρ et θ désignant des constantes (*systèmes simples*), les rela-

tions (3) sont satisfaites; et si nous faisons

$$A = \begin{matrix} a & b & c \\ b & c & d, \\ c & d & e \end{matrix}$$

et posons

$$H_1 A H = A',$$

on voit que les systèmes A′ et A sont de la même forme.

La recherche des systèmes de transformation que nous devons employer est donc ramenée à la résolution de l'équation (4), où A et I désignent des systèmes donnés et où l'un des nombres ρ et θ peut être choisi arbitrairement.

Ces deux nombres sont reliés entre eux par une relation que l'on établira facilement en égalant les déterminants des deux membres de l'équation (4).

On trouve ainsi

$$2 = \Delta(\rho \mathcal{A} + \theta I) = 4 j_0 \rho^3 - 2 i_0 \rho^2 \theta + 2\theta^3,$$

d'où

$$(4)' \qquad 2 j_0 \rho^3 - i_0 \rho^2 \theta + \theta^3 = 1.$$

Telle est la relation qui relie les nombres ρ et θ; j_0 et i_0 désignent respectivement l'invariant cubique et l'invariant quadratique de la forme ω.

5. La valeur du déterminant que j'ai transcrite ci-dessus se déduit immédiatement de la formule suivante, facile à vérifier, et dont je me servirai dans ce qui suit

$$(5) \begin{cases} \Delta[A(\mathcal{A}x + Iy) - z] \\ \quad = -z^3 + z(iy^2 + 2hxy + kx^2) + j(4 j_0 x^3 - 2 i_0 x^2 y + 2y^3). \end{cases}$$

Dans cette identité, où x, y, z désignent des quantités

arbitraires, j'ai écrit, pour abréger,

$$h = \alpha \frac{dj}{da} + \beta \frac{dj}{db} + \gamma \frac{dj}{dc} + \delta \frac{dj}{dd} + \varepsilon \frac{dj}{de}$$

et

$$-k = 4(ac - b^2)(\gamma\varepsilon - \delta^2) - (ad - bc)(\beta\varepsilon - \gamma\delta) + \ldots,$$

k désignant l'invariant quadratique simultané des hessiens de u et de ω.

6. Ayant choisi l'une quelconque des solutions de l'équation (4), où les nombres ρ et θ satisfont à la relation (4)', on en déduira un système A' de même forme que le système A.

Les coordonnées a', b', c', ... qui entrent dans ce nouveau système sont reliées par une identité de la forme

$$a'\varepsilon' - 4b'\delta' + 6c'\gamma' - 4d'\beta' + e'\alpha' = 0,$$

et je me propose d'abord de déterminer la valeur des constantes qui entrent dans cette relation, ou encore le système $\mathcal{A}'$ que l'on peut former avec elles et qui est analogue à $\mathcal{A}$.

A cet effet, je remarque que l'on a, d'après l'équation (5),

$$\Delta(\mathrm{A}\mathcal{A} - z) = -z^3 + kz + 4jj_0,$$

et que, si le second membre de cette relation ne contient pas de terme en z^2, c'est précisément en vertu de l'identité (1).

Pour trouver $\mathcal{A}'$, il faut donc le déterminer par la condition que le développement de l'expression

$$\Delta(\mathrm{A}'\mathcal{A}' - z)$$

manque du terme en z^2.

Il suffit pour cela de déterminer deux quantités λ et μ, de telle sorte que l'expression

$$\mathcal{A}' = \mathrm{H}_0(\lambda\mathcal{A} + \mu\mathrm{I})\mathrm{H}_{01}$$

ait la même forme que $\mathcal{A}$ (c'est-à-dire que le terme du milieu soit le quadruple de chacun des termes de la diagonale secondaire du système).

En effet, en remplaçant respectivement A' et $\mathcal{A}'$ par leurs valeurs, on a identiquement

$$\Delta(\mathrm{A}'\mathcal{A}' - z) = \Delta[\mathrm{H}_1\mathrm{A}\mathrm{H}\mathrm{H}_0(\lambda\mathcal{A}+\mu\mathrm{I})\mathrm{H}_{01} - z] = \Delta[\mathrm{A}(\lambda\mathcal{A}+\mu\mathrm{I}) - z],$$

expression dont la valeur, en vertu de la formule (5), manque bien du terme en z^2.

7. Les nombres ρ, θ, λ et μ ayant été déterminés comme je l'ai dit ci-dessus, en désignant par i', h', k',... les quantités analogues à i, h, k,..., mais relatives aux systèmes A' et $\mathcal{A}'$, la formule (5) donne la relation

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta[\mathrm{A}'(\mathcal{A}'x + \mathrm{I}y) - z] = & -z^3 + 2(i'y^2 + 2h'xy + k'x^2) \\ & + j(4j'_0x^3 - 2i'_0x^2y + 2y^3); \end{aligned} \right.$$

le déterminant qui précède devient, si l'on remplace dans son expression A' et $\mathcal{A}'$ par leurs valeurs

$$\Delta\{\mathrm{H}_1\mathrm{A}\,\mathrm{H}[\mathrm{H}_0(\lambda\mathcal{A} + \mu\mathrm{I})\mathrm{H}_{01}x + \mathrm{I}y] - z\},$$

ou, en effectuant les calculs,

$$\Delta(\lambda x\mathrm{H}_1\mathrm{A}\mathcal{A}\mathrm{H}_{01} + \mu x\mathrm{H}_1\mathrm{A}\mathrm{I}\mathrm{H}_{01} + y\mathrm{H}_1\mathrm{A}\mathrm{H}\mathrm{I} - z),$$

ou encore, en multipliant à droite par H_1 le système compris sous le signe Δ et en le divisant ensuite à gauche par H_1,

$$\Delta(\lambda x\mathrm{A}\mathcal{A} + \mu x\mathrm{A}\mathrm{I} + y\mathrm{A}\mathrm{H}\mathrm{I}\mathrm{H}_1 - z),$$

ou encore, en vertu de la formule (4),

$$\Delta\{\mathrm{A}[(\lambda x + \rho y)\mathcal{A} + (\mu x + \theta y)\mathrm{I}] - z\}.$$

Si l'on développe ce déterminant au moyen de la formule (5), on obtient l'expression

$$(7)\quad \begin{cases} -z^3+z[i(\mu x+\theta y)^2+2h(\lambda x+\rho y)(\mu x+\theta y)+k(\lambda x+\rho y)^2 \\ +j[4j_0(\lambda x+\rho y)^3-2i_0(\lambda x+\rho y)^2(\mu x+\theta y)+2(\mu x+\theta y)^3. \end{cases}$$

8. Les polynômes (7) et (6) doivent être identiques, quelles que soient les variables x, y, z; en identifiant ces deux expressions, on obtient les relations contenues dans le tableau suivant :

Tableau A.

$$(1)\quad \begin{cases} 2j_0\rho^3 - i_0\rho^2\theta + \theta^3 = 1, \\ 6j_0\lambda\rho^2 - i_0\rho^2\mu - 2i_0\lambda\rho\theta + 3\mu\theta^2 = 0; \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} 2j'_0 = 2j_0\lambda^3 - i_0\lambda^2\mu + \mu^3, \\ i'_0 = i_0\lambda^2\theta + 2i_0\lambda\rho\mu - 6j_0\lambda^2\rho - 3\mu^2\theta; \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} i' = \theta^2 i + 2\rho\theta h + \rho^2 k, \\ h' = \mu\theta i + (\lambda\theta + \rho\mu)h + \lambda\rho k, \\ k' = \mu^2 i + 2\lambda\mu h + \lambda^2 k. \end{cases}$$

Je laisse momentanément de côté ces relations, sur lesquelles j'aurai à revenir plus tard ; je me contenterai de faire observer que la première des équations (3) du tableau précédent donne la solution de la question principale que je m'étais proposée.

Toutes les quadriques fournies par l'équation

$$i' = \theta^2 i + 2\rho\theta h + \rho^2 k = 0,$$

où le rapport $\frac{\rho}{\theta}$ peut varier d'une façon arbitraire, coupent $\mathcal{X}$ suivant une de ses lignes asymptotiques ; et comme par chacun des points de cette surface passent deux de ces quadriques, on obtient ainsi le système complet des asymptotiques cherchées.

(*La suite prochainement.*)

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE MILITAIRE (ANNÉE 1872).

Épure (3 heures).

Une pyramide triangulaire SABC a sa base ABC appliquée sur la partie antérieure du plan horizontal. L'arête AB est parallèle à la ligne de terre et le sommet C en avant de l'arête AB. On donne en millimètres $AB = AC = 116$, $BC = 147$, $SA = SB = SC = 104$. Cela posé, on demande de construire : 1° les projections de la pyramide; 2° les projections de la section faite par un plan perpendiculaire à l'arête SA, mené par le point de cette arête situé au quart de sa longueur, à partir du sommet S; 3° les projections des points situés sur l'arête SA, d'où l'on voit l'arête BC sous un angle droit.

Composition de mathématiques (4 heures).

1° Démontrer que les surfaces de deux triangles semblables sont entre elles comme les carrés des côtés homologues. Les surfaces de deux triangles semblables étant dans le rapport de 5 à 14, calculer, à $\frac{1}{1000}$ près, le rapport de deux côtés homologues, sans employer les logarithmes.

2° Dans le triangle ABC, on donne le côté a, les angles adjacents B et C, et l'on demande de calculer la surface. Données : $a = 542^{m},27$, $B = 67^{\circ}28'47''$, $C = 64^{\circ}42'55''$.

3° On donne sur un même plan deux parallèles, un point extérieur P à ces droites, et l'on demande de placer la plus courte distance de ces parallèles, de manière qu'elle soit vue de P sous l'angle maximum.

Nota. — On devra mettre sur la copie tous les calculs qu'on aura faits.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 385

(voir 1re série, t. XVI, p. 183);

PAR M. H. BROCARD.

Trouver l'équation de l'enveloppe de la droite qui joint les extrémités des deux aiguilles d'une montre ordinaire.

La question proposée revient évidemment à la suivante : Deux mobiles B, C, partant d'un point A d'une circonférence OA de rayon a, parcourent cette circonférence dans le même sens. L'un d'eux se meut douze fois plus vite que l'autre. Trouver l'enveloppe de la droite BC qui les joint.

Les coordonnées des deux points B et C, rapportés à un système d'axes rectangulaires YOA, ont pour valeurs

$$x = \cos\omega, \qquad y = \sin\omega,$$
$$x = a\cos 12\omega, \quad y = a\sin 12\omega,$$

ω désignant l'angle $\widehat{BOA}$.

L'équation de la droite BC est alors

$$(1) \qquad x\cos\frac{13}{2}\omega + y\sin\frac{13}{2}\omega = a\cos\frac{11}{2}\omega.$$

L'élimination de ω entre cette équation et sa dérivée par rapport à ω,

$$(2) \qquad 13x\sin\frac{13}{2}\omega - 13y\cos\frac{13}{2}\omega = 11a\sin\frac{11}{2}\omega,$$

conduira, comme on sait, à l'équation de l'enveloppe cherchée.

Or les valeurs de x et de y que l'on en tire ont pour expressions

$$x = \frac{12}{13} a \cos\omega + \frac{a}{13} \cos 12\omega,$$

$$y = \frac{12}{13} a \sin\omega + \frac{a}{13} \sin 12\omega.$$

Ce sont précisément les coordonnées du point A de la circonférence de rayon $\frac{a}{13}$ roulant extérieurement sur la circonférence ayant O pour centre et $\frac{11}{13} a$ pour rayon. L'enveloppe cherchée est donc l'épicycloïde ou épitrochoïde engendrée de cette manière.

D'ailleurs, des équations (1) et (2) on tire

$$\cos^2 \frac{11}{2} \omega = \frac{13^2(x^2 + y^2) - 11^2 a^2}{48 a^2},$$

$$\sin^2 \frac{11}{2} \omega = \frac{13^2 (a^2 - x^2 - y^2)}{48 a^2},$$

ce qui montre bien que la courbe est renfermée entre les deux circonférences concentriques

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{11 a}{13}\right)^2$$

et

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

L'enveloppe se compose de onze arcs égaux tangents, en leurs milieux, à la circonférence $x^2 + y^2 = a^2$. Ce sont les sommets de la courbe. Ils ont pour coordonnées polaires

$$\rho = a, \quad \omega = \frac{2 k \pi}{11}.$$

Les points de rebroussement sont situés sur l'autre

circonférence, et ont pour coordonnées polaires

$$\rho = \frac{11}{13}a, \quad \omega = \frac{(2k-1)}{11}\pi.$$

En ces points, la tangente passe par l'origine.

Nota. — On aurait pu supposer les points B et C, à l'origine du mouvement, sur la ligne OA et sur deux circonférences concentriques de rayons a et b. Ce cas général n'offre aucun intérêt, à cause de la complication des calculs.

Question 857

(voir 2ᵉ série, t. VII, p. 189);

PAR M. ÉD. WEYR,
Étudiant à Prague.

D'un point M *situé dans le plan d'une courbe algébrique, on mène toutes les tangentes à cette courbe et une droite quelconque* MA. *Aux points de contact des tangentes issues de* M, *on construit les coniques ayant quatre points confondus sur la courbe et tangentes à* MA. *Si t désigne la distance comptée sur* MA *du point* M *au point de contact de l'une de ces coniques, et* R *le rayon de courbure de cette conique en ce point de contact, on a* $\sum \frac{R}{t^3} = 0$, *la somme s'étendant à toutes les coniques.* (A. RIBAUCOUR.)

Soient C, C′, C″,... les points de contact des tangentes issues du point M, et soient r, r', r'',... les rayons de courbure de la courbe algébrique en ces points. D'après un théorème de M. Mannheim (*voir* 2ᵉ série, *Question* 745, t. VII, p. 181), on a

$$(1) \qquad \sum \frac{r}{\overline{MC}^3} = 0.$$

Soient C, 1, 2, 3 quatre points consécutifs de notre courbe et imaginons toutes les coniques qui passent par eux; on sait qu'il y en aura deux qui coupent une droite MA en deux points confondus. Mais le système des droites C1 et 23, ou bien la tangente MC comptée deux fois, constitue évidemment une de ces deux coniques, en sorte qu'il n'y aura qu'une seule conique proprement dite S qui passe par C, 1, 2, 3 et qui touche MA. Désignons par D le point de contact.

Ayant égard aux points C′, C″,..., on construira de la même manière les coniques S′, S″,... qui touchent MA en certains points D′, D″,..., ayant en C′, C″,... avec la courbe proposée un contact du troisième ordre.

Si l'on désigne par R, R′, R″,... les rayons de courbure des coniques S, S′, S″,... aux points respectifs D, D′, D″,..., on a à démontrer l'équation suivante

$$\sum \frac{R}{\overline{MD}^4} = 0.$$

Le théorème de M. Mannheim donne pour les coniques S, S′, S″,... les relations

$$\frac{r}{\overline{MC}^3} + \frac{R}{\overline{MD}^3} = 0, \quad \frac{r'}{\overline{MC'}^3} + \frac{R'}{\overline{MD'}^3} = 0, \ldots,$$

d'où l'on tire

$$\sum \frac{r}{\overline{MC}^3} + \sum \frac{R}{\overline{MD}^3} = 0,$$

ou bien, en vertu de l'équation (1),

$$(2) \qquad \sum \frac{R}{\overline{MD}^3} = 0.$$

Passons alors sur la droite MA du point M à un point infiniment rapproché M′, dont la distance à M soit δ. Si l'on mène du point M′ à la courbe algébrique toutes les

tangentes, leurs points de contact Γ, Γ', Γ'',... seront voisins des points C, C', C'',..., et puisque les coniques S, S', S'',... passent par *quatre* points consécutifs de la courbe, ces coniques auront aux points Γ, Γ', Γ'' avec la courbe encore un contact du second ordre. On voit par là que notre courbe algébrique aura aux points Γ, Γ', Γ'',... les mêmes rayons de courbure ρ, ρ', ρ'',... que les coniques S, S', S'',.... On aura donc, en appliquant de nouveau le théorème de M. Mannheim à ces coniques,

$$\sum \frac{\rho}{\overline{\mathrm{M}'\Gamma}^3} + \sum \frac{\mathrm{R}}{\overline{\mathrm{M}'\mathrm{D}}^3} = 0;$$

en appliquant ce théorème à la courbe proposée seule, il vient

$$\sum \frac{\rho}{\overline{\mathrm{M}'\Gamma}^3} = 0,$$

ce qui donne

$$\sum \frac{\mathrm{R}}{\overline{\mathrm{M}'\mathrm{D}}^3} = 0.$$

Mais on a

$$\mathrm{M}'\mathrm{D} = \mathrm{M}'\mathrm{M} + \mathrm{MD} = \delta + \mathrm{MD},$$

δ désignant une quantité infiniment petite; on aura donc

$$\frac{1}{\overline{\mathrm{M}'\mathrm{D}}^3} = \frac{1}{\overline{\mathrm{MD}}^3} + \delta \frac{d}{d\mathrm{MD}} \left[\frac{1}{\overline{\mathrm{MD}}^3} \right] = \frac{1}{\overline{\mathrm{MD}}^3} - 3\delta \frac{1}{\overline{\mathrm{MD}}^4},$$

d'où il suit

$$\sum \frac{\mathrm{R}}{\overline{\mathrm{M}'\mathrm{D}}^3} = \sum \frac{\mathrm{R}}{\overline{\mathrm{MD}}^3} - 3\delta \sum \frac{\mathrm{R}}{\overline{\mathrm{MD}}^4} = 0.$$

Ayant recours à l'équation (2), on trouve

$$\sum \frac{\mathrm{R}}{\overline{\mathrm{MD}}^4} = 0.$$

C. Q. F. D.

Question 1003

(voir 2e série, t. IX, p. 132);

PAR M. MORET-BLANC,

Professeur au lycée du Havre.

Les équations tangentielles d'un cône droit touchant trois plans donnés (u_1, v_1, w_1), (u_2, v_2, w_2), (u_3, v_3, w_3) *sont, dans le cas des axes rectangulaires,*

$$\begin{vmatrix} u & v & w & 1 \\ u_1 & v_1 & w_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} u & v & w & \sqrt{u^2+v^2+w^2} \\ u_1 & v_1 & w_1 & \sqrt{u_1^2+v_1^2+w_1^2} \\ u_2 & v_2 & w_2 & \sqrt{u_2^2+v_2^2+w_2^2} \\ u_3 & v_3 & w_3 & \sqrt{u_3^2+v_3^2+w_3^2} \end{vmatrix} = 0;$$

les signes des radicaux sont indépendants ; il y a quatre solutions. (L. PAINVIN.)

Soit

$$(1) \qquad ux + vy + wz + 1 = 0$$

l'équation du plan variable dont le cône est l'enveloppe; pour que cette enveloppe soit déterminée, il faut qu'il existe entre ses trois paramètres deux relations en vertu desquelles deux paramètres soient fonctions du troisième, seule variable indépendante. Or le plan devant coïncider successivement avec chacun des plans donnés, on a les trois équations

$$(2) \qquad u_1 x + v_1 y + w_1 z + 1 = 0,$$

$$(3) \qquad u_2 x + v_2 y + w_2 z + 1 = 0,$$

$$(4) \qquad u_3 x + v_3 y + w_3 z + 1 = 0.$$

Éliminant x, y, z entre ces quatre équations, on aura la

première relation

$$\begin{vmatrix} u & v & w & 1 \\ u_1 & v_1 & w_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Soient ξ, η, ζ les coordonnées d'un point de l'axe. Ce point devant être équidistant de tous les plans tangents, on aura les équations

$$\frac{u\xi + v\eta + w\zeta + 1}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} = \frac{u_1\xi + v_1\eta + w_1\zeta + 1}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2 + w_1^2}}$$
$$= \frac{u_2\xi + v_2\eta + w_2\zeta + 1}{\sqrt{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2}} = \frac{u_3\xi + v_3\eta + w_3\zeta + 1}{\sqrt{u_3^2 + v_3^3 + w_3^2}} = \lambda.$$

On obtiendra une seconde relation en éliminant ξ, η, ζ entre ces quatre équations; en supprimant le facteur commun, il vient

$$\begin{vmatrix} u & v & w & \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \\ u_1 & v_1 & w_1 & \sqrt{u_1^2 + v_1^2 + w_1^2} \\ u_2 & v_2 & w_2 & \sqrt{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2} \\ u_3 & v_3 & w_3 & \sqrt{u_3^2 + v_3^2 + w_3^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Chaque radical est susceptible du double signe; mais si, pour une valeur donnée λ, on détermine les signes des trois derniers radicaux, on en conclura ξ, η, ζ, et par suite le signe du premier radical. Il y a donc huit combinaisons de signes correspondant aux huit angles dièdres que forment les trois plans donnés. Ces huit combinaisons ne donnent que quatre solutions, parce qu'en changeant tous les signes d'une colonne on ne change pas l'équation.

En vertu des deux relations trouvées, deux paramètres,

v et w par exemple, seront fonctions de u, et l'on obtiendra en coordonnées ponctuelles l'équation du cône, en éliminant u entre l'équation du plan variable et sa dérivée par rapport à u, qui sera

$$x + y\frac{dv}{du} + z\frac{dw}{du} = 0.$$

Note. — La même question a été résolue par M. O. Callandreau, candidat à l'École Polytechnique.

QUESTIONS.

1088. Trouver l'aire de l'enveloppe de la corde commune à une ellipse et à son cercle osculateur.

(L. Desmons.)

1089. Trouver le lieu des pôles des cordes communes et la podaire du centre relative à l'enveloppe des cordes communes. (L. Desmons.)

1090. Le triangle qui a pour sommet le centre de l'ellipse et pour base la corde du cercle osculateur en un point de l'ellipse est équivalent au triangle qui a pour sommet le centre de l'ellipse et pour base la corde de l'ellipse perpendiculaire au grand axe, menée au point dont le paramètre angulaire est double de celui du point de contact. Maximum de l'aire de ce triangle. Maximum de la longueur de la corde commune. (L. Desmons.)

1091. Les faces d'un dièdre droit doivent rester tangentes à un ellipsoïde donné et l'arête de ce dièdre doit rencontrer deux droites fixes quelconques. On demande le lieu de cette arête? (Mannheim.)

RECHERCHES ANALYTIQUES

sur la surface du troisième ordre qui est la réciproque de la surface de Steiner

(suite, voir même tome, p. 319);

Par M. LAGUERRE.

II. — *Propriétés des lignes asymptotiques.*

9. Considérons une ligne asymptotique quelconque Z de la surface $\mathcal{K}$; cette ligne est l'arête de rebroussement de la surface enveloppée par le plan dont l'équation est

$$u = at^4 + 4bt^3\tau + 6ct^2\tau^2 + 4dt\tau^3 + e\tau^4 = 0,$$

$t:\tau$ désignant un paramètre variable.

Lorsqu'on donne à ce paramètre une valeur déterminée, l'équation précédente représente un plan osculateur de Z et tangent à $\mathcal{K}$, que j'appellerai simplement plan (t). J'appellerai tangente (t) la tangente à Z au point où le plan (t) lui est osculateur; ses équations sont

$$\frac{du}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{du}{d\tau} = 0.$$

Enfin j'appellerai point (t) le point de contact de cette tangente; ses équations sont

$$\begin{aligned} at^2 + 2bt\tau + c\tau^2 &= 0, \\ bt^2 + 2ct\tau + d\tau^2 &= 0, \\ ct^2 + 2dt\tau + e\tau^2 &= 0. \end{aligned}$$

Je dirai indifféremment que $t:\tau$ (ou t) est le paramètre de ce point, de la tangente en ce point à l'asymptotique

et du plan osculateur dont cette tangente est la caractéristique.

Les relations précédentes et l'équation (1) permettent d'exprimer les coordonnées d'un point quelconque de Z en fonction de son paramètre; on obtient ainsi le tableau suivant :

Tableau B.

$$
\begin{aligned}
a &= -4\alpha t^3\tau^3 - 12\beta t^2\tau^4 - 12\gamma t\,\tau^5 - 4\delta\tau^6,\\
b &= 3\alpha t^4\tau^2 + 8\beta t^3\tau^3 + 6\gamma t^2\tau^4 - \varepsilon\tau^6,\\
c &= -2\alpha t^5\tau - 4\beta t^4\tau^2 + 4\delta t^2\tau^4 + 2\varepsilon t\tau^5,\\
d &= \alpha t^6 - 6\gamma t^4\tau^2 - 8\delta t^3\tau^3 - 3\varepsilon t^2\tau^4,\\
e &= 4\beta t^6 + 12\gamma t^5\tau + 12\delta t^4\tau^2 + 4\varepsilon t^3\tau^3.
\end{aligned}
$$

10. Étant donné un point M, dont les coordonnées soient a', b', c', d' et e', posons pour un instant

$$
\begin{vmatrix}
a+\lambda a' & b+\lambda b' & c+\lambda c'\\
b+\lambda b' & c+\lambda c' & d+\lambda d'\\
c+\lambda c' & d+\lambda d' & e+\lambda e'
\end{vmatrix}
= j + \lambda j_0 + \lambda^2 j' + \lambda^3 j' \ (^*);
$$

d'après la méthode donnée par Joachimsthal, on obtient l'équation du cône circonscrit à $\mathcal{X}$, et ayant pour sommet le point M, en égalant à zéro le discriminant de la forme cubique contenue dans le second membre de l'égalité précédente. Si le point M est sur Z, on a

$$j' = 0,$$

et l'équation du cône circonscrit devient

$$j_0^2 - 4jj'_0 = 0.$$

On peut dans cette équation exprimer, en employant les formules du tableau B, les coordonnées du point M en

(*) Pour éviter toute confusion, je ferai remarquer qu'ici j_0, j'_0, j n'ont pas le même sens que dans le paragraphe précédent.

fonction de son paramètre t, et je ferai remarquer qu'*après la substitution les invariants j_0, j, j'_0 deviendront des covariants des formes u et ω.*

Comme un covariant est déterminé par son terme du degré le plus élevé en t, il me suffira, pour calculer chacun des covariants dont je viens de parler, de supposer a', b' et c' égaux à zéro, et de remplacer respectivement d' et e' par αt^6 et $4\beta t^6$. Il viendra ainsi

$$j_0 = [4\beta(ac - b^2) - 2\alpha(ad - bc)]t^6 + \ldots;$$

d'où l'on voit que j_0 est égal à $-2J_0$, J_0 désignant le jacobien de ω et du hessien de u, en sorte que

$$J_0 = [\alpha(ad - bc) - 2\beta(ac - b^2)]t^6 + \ldots.$$

On obtient de même

$$j'_0 = -a\alpha^2 u'^2 + \ldots,$$

d'où

$$j'_0 = -\omega^2 u;$$

par suite, l'équation du cône circonscrit à $\mathfrak{X}$ et ayant pour sommet le point (t) est

$$J_0^2 + \omega^2 ju = 0.$$

11. Le coefficient du terme le plus élevé dans le covariant $J_0^2 + \omega^2 ju$ est

$$t^{12}\{[\alpha(ad-bc)-2\beta(ac-b^2)]^2+a\alpha^2(ace+2bcd-ad^2-eb^2-c^3)\},$$

ou, en effectuant les calculs,

$$t^{12}(ac - b^2)[\alpha^2(ae - c^2) - 4\alpha\beta(ad - bc) + 4\beta^2(ac - b^2)].$$

Si l'on désigne par H le hessien de u et par G le covariant

$$[\alpha^2(bd - c^2) - \alpha\beta(ad - bc) + \beta^2(\alpha\gamma - \beta^2)]t^6 + \ldots,$$

on voit que l'on a identiquement

$$J_1^2 + \omega^2 ju = H(\omega^2 i + 4G);$$

d'où il suit que le cône circonscrit se décompose en deux cônes du second ordre, *propriété caractéristique de la surface réciproque de la surface de Steiner* (*).

Remarque. — Les deux cônes ainsi obtenus se distinguent très-nettement par la forme de leur équation; je dirai que le cône dont l'équation est

$$H = 0$$

appartient à l'asymptotique Z, et je le désignerai par la notation $\mathfrak{H}_1$; il est clair que le second cône *appartient* à la deuxième ligne asymptotique qui passe par le point (t).

12. Soient (t) et (t') deux points de l'asymptotique Z; considérons le premier émanant de u,

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathcal{E} = {} & t(at'^3 + 3bt'^2\tau' + 3ct'\tau'^2 + d\tau'^3) \\ & + \tau(bt'^3 + 3ct'^2\tau' + 3dt'\tau'^2 + e\tau'^3). \end{aligned} \right.$$

L'équation $\mathcal{E} = 0$ représente un plan passant évidemment par la tangente (t'); si, laissant le point (t) fixe, on fait varier le point (t'), ce plan enveloppe une surface du quatrième ordre ayant pour arête de rebroussement une cubique gauche.

L'équation de cette surface s'obtient en égalant à zéro le discriminant de $\mathcal{E}$ (par rapport à t' et τ'); comme ce discriminant est un covariant de u et de ω, il suffit de cal-

---

(*) Sur la surface de Steiner, *voir* BORCHARDT, t. LXIII : CREMONA, *Sur la surface du quatrième ordre*, etc., p. 315 et suiv. — BORCHARDT, t. LXIV : KUMMER, *Ueber die Flächen des vierten Grades;* WEIERSTRASS, *Note zur vorstehenden Abhandlung;* SCHRÖTER, *Ueber die Steiner'sche Fläche.*

culer son terme du degré le plus élevé qui est

$$[4(ac-b^2)(bd-c^2)-(ad-bc)^2]t^4,$$

ou encore

$$[aj-(ac-b^2)i]t^4.$$

L'équation de la surface développable, que j'appellerai Σ_t, est donc

$$ju-i\mathrm{H}=0.$$

13. Pour tous les points de l'arête de rebroussement de Σ_t, on doit avoir

$$\frac{at+b\tau}{bt+c\tau}=\frac{bt+c\tau}{ct+d\tau}=\frac{ct+d\tau}{dt+e\tau},$$

ou encore

$$(9)\quad\left\{\begin{array}{l}(ac-b^2)t^2+(ad-bc)t\tau+(bd-c^2)\tau^2=0,\\(ad-bc)t^2+(ac-c^2)t\tau+(be-dc)\tau^2=0,\\(bd-c^2)t^2+(be-cd)t\tau+(ce-d^2)\tau^2=0.\end{array}\right.$$

Le déterminant de ces trois équations est égal à j^2, ainsi qu'il est facile de le vérifier; comme il est nul par les points de la courbe, il en résulte qu'elle est située sur la surface $\mathfrak{X}$.

Elle est également située sur le cône $\mathfrak{H}_t$; l'équation de ce cône peut en effet se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}&t^2[(ac-b^2)t^2+(ad-bc)t\tau+(bd-c^2)\tau^2]\\&\quad+t\tau[(ad-bc)t^2+(ac-c^2)t\tau+(be-cd)\tau^2]\\&\quad+\tau^2[(bd-c^2)t^2+(be-cd)t\tau+(ce-d^2)\tau^2]=0.\end{aligned}$$

D'où cette conclusion :

L'arête de rebroussement de la développable Σ_t est la cubique gauche, suivant laquelle la surface $\mathfrak{X}$ est touchée par le cône circonscrit à la surface, apparte-

nant à l'asymptotique Z, *et ayant pour sommet le point* (*t*).

De là on déduira facilement les propositions suivantes :

Théorème I. — *Les cônes du second degré circonscrits à* 𝔛, *ayant leur sommet sur une ligne asymptotique* Z *de cette surface et appartenant à cette ligne asymptotique, touchent* 𝔛 *suivant des cubiques gauches. Les surfaces développables, dont ces cubiques sont les arêtes de rebroussement, coupent* 𝔛 *suivant la ligne* Z.

Théorème II. — *Étant pris un point* M *sur la surface* 𝔛, *le cône, circonscrit à la surface et dont ce point est le sommet, se compose de deux cônes du second ordre. Chacun d'eux touche* 𝔛 *suivant une cubique gauche; les surfaces développables, dont ces cubiques sont les arêtes de rebroussement, coupent* 𝔛 *suivant les deux lignes asymptotiques qui se croisent au point* M.

14. Les cônes du second degré circonscrits à 𝔛 et qui *appartiennent* à l'asymptotique Z touchent cette surface suivant des cubiques gauches que je dirai aussi appartenir à l'asymptotique.

Toutes les cubiques appartenant à cette asymptotique passent par les quatre points satisfaisant aux équations

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{d}{e};$$

ces points sont d'ailleurs les points de rebroussement de l'asymptotique et les points coniques de 𝔛; leurs paramètres sont les racines de l'équation $\omega = 0$.

Indépendamment de ces quatre points, deux cubiques appartenant a l'asymptotique Z se coupent en un cinquième point.

Ce point est le sommet d'un cône du second degré qui contient les deux cubiques.

Pour démontrer cette proposition, je m'appuierai sur le lemme suivant que l'on établira facilement :

Une surface développable du quatrième ordre (ayant pour arête de rebroussement une cubique gauche) étant considérée comme l'enveloppe d'un plan mobile

$$f(\lambda) = 0,$$

$f(\lambda)$ désignant un polynôme du troisième degré en λ, les différents cônes du second ordre qui passent par l'arête de rebroussement sont donnés par l'équation que l'on obtient en égalant à zéro le covariant quadratique de $f(\lambda)$.

Cela posé, la cubique gauche, suivant laquelle la surface $\mathcal{X}$ est touchée par le cône du second ordre ayant le point (t) pour sommet et appartenant à l'asymptotique Z, est l'enveloppe du plan mobile défini par l'équation (8) (t' étant considérée comme la variable). L'équation générale des cônes du second ordre, passant par cette cubique sera donc, en vertu du lemme précédent,

$$\begin{vmatrix} at + b\tau & bt + c\tau & ct + d\tau \\ bt + c\tau & ct + d\tau & dt + e\tau \\ t'^2 & -t'\tau' & t'^2 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en effectuant les calculs,

$$(10)\left\{\begin{aligned} & t'^2[(ac - b^2)t^2 + (ad - bc)t\tau + (bd - c^2)\tau^2] \\ & \quad + t'\tau'(ad - bc)t^2 + (ae - c^2)t\tau + (be - cd)\tau^2] \\ & \quad + t'^2[(bd - c^2)t^2 + (be - cd)t\tau + (ce - d^2)\tau^2] = 0. \end{aligned}\right.$$

Je remarque maintenant que cette équation est symétrique par rapport à t et t'; d'où les propositions suivantes :

THÉORÈME III. — *Si de deux points* (t) *et* (t') *situés sur l'asymptotique* Z, *on mène les cônes du second ordre circonscrits à* $\mathfrak{X}$ *et appartenant à cette asymptotique, les deux cubiques gauches de contact sont situées sur un même cône du second ordre, dont le sommet est le point d'intersection des deux cubiques distinct des quatre points nodaux de* $\mathfrak{X}$.

Remarque. — Ce cône est défini par l'équation (10).

THÉORÈME IV. — *Étant donnée une cubique quelconque passant par les quatre points coniques de* $\mathfrak{X}$, *la surface développable, dont cette cubique est l'arête de rebroussement, coupe* $\mathfrak{X}$ *suivant une de ses lignes asymptotiques* Z.

Si l'on considère les divers cônes du second degré qui contiennent cette cubique, ils coupent $\mathfrak{X}$ *suivant les diverses cubiques appartenant à* Z, *en sorte que les développables dont elles sont les arêtes de rebroussement contiennent toutes* Z, *et que les développables circonscrites à* $\mathfrak{X}$ *le long de ces cubiques sont des cônes du second ordre dont les sommets sont situés sur* Z.

15. Il est facile d'étendre les résultats précédents à une asymptotique quelconque Z_ρ résultant de l'intersection de $\mathfrak{X}$ avec la quadrique

$$\theta^2 i + 2\rho\theta h + \rho^2 k = 0.$$

A cet effet, j'établirai d'abord une formule très-simple et que j'aurai souvent occasion d'employer.

Soit, en conservant les notations du § I, le système linéaire gauche

$$U = \begin{matrix} 0 & t^2 & t\tau \\ -t^2 & 0 & \tau^2, \\ -t\tau & -\tau^2 & 0 \end{matrix}$$

d'où

$$U_0 = \begin{matrix} \tau^2 & 0 & 0 \\ -t\tau & 0 & 0 \\ t^2 & 0 & 0 \end{matrix} \times \begin{matrix} \tau^2 & -t\tau & t^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix};$$

le produit HUH_1 est aussi un système gauche que je ferai égal à (*)

$$V = \begin{matrix} 0 & x & y \\ -x & 0 & z, \\ -y & -z & 0 \end{matrix}$$

en sorte que l'on aura

$$V_0 = \begin{matrix} z & 0 & 0 \\ -y & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \end{matrix} \times \begin{matrix} z & -y & x \\ 0 & 0 & 0, \\ 0 & 0 & 0. \end{matrix}$$

et par suite

$$H_{01} \times \begin{matrix} \tau^2 \\ -t\tau \\ t^2 \end{matrix} = \begin{matrix} z \\ -y. \\ x \end{matrix}$$

De l'équation (4) on déduit

$$H(I+U)H_1 = \rho A + \theta I + V,$$

d'où

$$\Delta(I+U) = \Delta(\rho A + \theta I + V).$$

Représentons, pour abréger, par $\varphi(x, y, z)$ la forme quadratique

$$\alpha x^2 + 4\gamma y^2 + \varepsilon z^2 + 4\delta zy + 4\beta yx + 2\gamma xz;$$

en développant la relation précédente, on obtiendra l'équation

(11) $$\rho\varphi(x, y, z) + 2\theta(xz - y^2) = 0,$$

en sorte que, quand le rapport $t : \tau$ prend toutes les va-

(*) Il est important de ne pas confondre ici le système linéaire H avec le hessien de u que j'ai désigné par la même lettre.

leurs possibles, les variables x, y, z restent constamment liées par la relation (11).

16. Cela posé, d'après ce que j'ai démontré plus haut, l'équation générale des cônes circonscrits appartenant à l'asymptotique Z s'obtient en égalant à zéro le hessien de u; on peut donc l'écrire de la façon suivante :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & d \\ c & d & e \end{vmatrix} + \begin{matrix} \tau^4 & -\tau^3 t & \tau^2 t^2 \\ -\tau^3 t & \tau^2 t^2 & -\tau t^3 \\ \tau^2 t^2 & -\tau t^3 & t^4 \end{matrix} \Bigg| = 0,$$

ou simplement

$$\Delta(A + U_0) = 0.$$

Les cônes circonscrits appartenant à l'asymptotique Z_φ auront par suite pour équation

$$\Delta(A' + U_0) = \Delta(H_1 A H + U_0) = \Delta(A + H_{10} U_0 H_0) = 0,$$

ou encore

$$\Delta(A + V_0) = 0,$$

ou enfin en développant

$$\begin{aligned} f = (ac - b^2)x^2 + (ae - c^2)y^2 + (ce - d^2) \\ + 2(be - cd)yz + 2(bd - c^2)zx + 2(ad - bc)xy = 0. \end{aligned}$$

Telle est l'équation générale des cônes du second ordre circonscrits à $\mathfrak{X}$ et appartenant à l'asymptotique Z_φ, les variables x, y, z étant assujetties à satisfaire à l'équation (11).

17. L'équation générale des cônes du second ordre qui contiennent les cubiques gauches appartenant à l'asymptotique Z (Cf, n° 14) peut se mettre sous la forme

$$\Delta \left\{ A + \begin{matrix} \tau^2 & 0 & 0 \\ -\tau t & 0 & 0 \\ t^2 & 0 & 0 \end{matrix} \times \begin{matrix} \tau'^2 & -\tau' t' & t'^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\} = 0.$$

L'équation analogue pour les cubiques appartenant à l'asymptotique Z_ρ sera

$$\Delta\left[H_1 AH + \begin{matrix} \tau^2 & 0 & 0 \\ -\tau t & 0 & 0 \\ t^2 & 0 & 0 \end{matrix} \times \begin{matrix} \tau'^2 & -\tau' t' & t'^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right]$$

$$= \Delta\left\{A + H_{01} \begin{matrix} \tau^2 & 0 & 0 \\ -\tau t & 0 & 0 \\ t^2 & 0 & 0 \end{matrix} \times \begin{matrix} \tau'^2 & -\tau' t' & t'^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \times H_0\right\},$$

ou encore, en vertu des relations que j'ai établies plus haut,

$$\Delta\left\{A + \begin{matrix} z & 0 & 0 \\ -y & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \end{matrix} \times \begin{matrix} z' & -y' & x' \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right\} = 0.$$

D'où la conclusion suivante :

Si l'on désigne par x, y, z et x', y', z' deux systèmes de variables satisfaisant respectivement à l'équation (11), *l'équation générale des cônes du second ordre qui contiennent les cubiques appartenant à l'asymptotique Z_ρ est*

$$x' \frac{df}{dx} + y' \frac{df}{dy} + z' \frac{df}{dz} = 0.$$

Je désigne ici par f la même forme quadratique que dans le numéro précédent.

Les équations des cubiques gauches elles-mêmes sont

$$(ac - b^2)x + (ad - bc)y + (bd - c^2)z = 0,$$
$$(ad - bc)x + (ae - c^2)y + (be - cd)z = 0,$$
$$(bd - c^2)x + (be - cd)y + (ce - d^2)z = 0.$$

(*La suite prochainement.*)

MÉTHODE DIRECTE

pour déterminer l'influence de la rotation de la Terre sur la chute des graves;

PAR M. H. RESAL.

A l'époque où les expériences de Foucault sur le pendule et le gyroscope fixèrent d'une manière spéciale l'attention des géomètres sur la dynamique des mouvements relatifs, Poncelet me proposa de prouver géométriquement, sans passer par le théorème de Coriolis, les formules se rapportant à la déviation des graves, tombant sans vitesse initiale d'une certaine hauteur, due à la rotation de la Terre. Je lui adressai, à ce sujet, un travail que j'avais complétement perdu de vue, lorsque, retrouvé dans ses papiers, il me fut remis chargé de notes de sa main. C'est la substance de ce travail que je vais reproduire dans ce qui suit.

Soient (*fig.* 1) :

PP′ l'axe de rotation de la Terre supposée sphérique, P étant censé le pôle nord;

C son centre;

n sa vitesse angulaire de rotation, dirigée de la gauche vers la droite pour l'observateur couché suivant PC et ayant les pieds en C;

$R = PC$ son rayon;

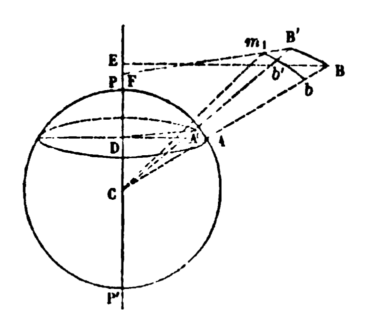
B la position initiale du mobile m, dont la verticale BC rencontre le méridien terrestre correspondant en A;

$BA = h$ la hauteur de la chute;

$\lambda = 90^\circ - \widehat{PCA}$ la latitude du lieu;

AD = R cos λ la perpendiculaire abaissée du point A sur PP′, ou le rayon du parallèle passant par ce point;

BE = (R + h) cos λ la distance de B à PP′.



Au bout du temps t compté à partir de l'instant de la chute, le point A a parcouru sur son parallèle l'arc $AA' = AD.nt = nR\cos\lambda.t$, et le point B est venu en B′; mais, en appelant θ l'angle BCB′, on a aussi $AA' = R\theta$, d'où

$$\theta = n\cos\lambda.t.$$

Soient, au bout du temps t, m_1 la projection du mobile sur le plan BCB′; b', b les intersections avec CB′, CB du cercle décrit du point C comme centre avec le rayon Cm_1; F le pied de la perpendiculaire abaissée de m_1 sur PP′.

Les distances telles que h, que nous pouvons atteindre en hauteur ou en profondeur, étant très-petites par rapport à R, l'angle décrit par le rayon CA pendant le temps t est lui-même très-petit; on peut donc, sans inconvénient, supposer $\cos\theta = 1$, $\sin\theta = \theta$, et considérer b' et b comme les projections de m_1 sur CB′ et CB, et de même $m_1 b'$, bb' comme des arcs de cercle appartenant au parallèle du point m_1 de rayon $Fm_1 = Cm_1 \cos\lambda$.

Il est clair que l'écartement $m_1 b'$, par rapport à CB', est dû à ce que la vitesse de B, qui est la vitesse initiale absolue du mobile, est supérieure à celles des autres points de ce rayon; de sorte que l'écart ci-dessus est de même ordre de grandeur que la différence des chemins parcourus en vertu des vitesses de B' et A', c'est-à-dire de $n(\mathrm{BE}-\mathrm{AD})\,t = nh\cos\lambda.t$. L'angle $\mathrm{B'C}m_1$ étant, par rapport à $\widehat{\mathrm{BCB'}} = \theta$, de l'ordre $\frac{h}{\mathrm{R}}$, peut être négligé relativement à ce dernier, et l'on peut, par conséquent, supposer que la direction de la pesanteur en m ou m_1 est parallèle à CB'.

La distance $m_1 b$, dont le mobile s'est éloigné dans le temps t de la droite CB considérée comme fixe dans l'espace, est due à la vitesse initiale $n.\mathrm{BE} = n.\mathrm{BC}\cos\lambda$ de ce mobile, et à une accélération variable d'une direction opposée due à la pesanteur, et qui est, pour m_1,

$$g\sin\theta = g\theta = ng\cos\lambda.t.$$

La vitesse due à cette accélération au bout du temps t étant $\int_0^t ng\cos\lambda.t\,dt = ng\cos\lambda.\frac{t^2}{2}$, et le chemin parcouru correspondant $\int_0^t ng\cos\lambda.\frac{t^2}{2}dt = ng\cos\lambda.\frac{t^3}{6}$, on a

$$m_1 b = n.\mathrm{BC}\cos\lambda - ng\cos\lambda.\frac{t^3}{6}.$$

D'un autre côté,

$$bb' = n.b\mathrm{C}.\cos\lambda.t.$$

Si donc on pose $y = m_1 b'$, il vient

$$(1)\qquad y = m_1 b - b'b = n\cos\lambda.\mathrm{B}b.t - ng\cos\lambda.\frac{t^3}{6}.$$

Or l'espace $\mathrm{B}b = \mathrm{B'}b'$, que nous représenterons par x,

parcouru par le mobile parallèlement à AB, étant dû à la composante $g\cos\theta$ ou g, on a

$$(2) \qquad x = \frac{gt^2}{2}.$$

Les longueurs x, y représentent les coordonnées de la trajectoire apparente du point m_1 rapportée à la verticale mobile B′C et à la tangente au parallèle de B. L'élimination de t entre les équations (1) et (2) conduit à la suivante

$$(3) \qquad y = \frac{1}{3}nt^3\cos\lambda = \frac{2}{3}nx\cos\lambda . \sqrt{\frac{2x}{g}}.$$

Quant à la déviation du mobile vers le nord, ou perpendiculairement au plan BCB′, elle est du second ordre comme la composante correspondante de g, et doit par cela même être négligée dans le mode d'approximation adopté.

Pour obtenir l'écartement total e, vers l'est, du mobile arrivé au bas de sa chute, il suffit de supposer $y = e$, $x = h$ dans l'équation (3), et l'on obtient ainsi la formule connue

$$e = \frac{1}{3}nt^3\cos\lambda = \frac{2}{3}nh\cos\lambda . \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

On a

$$n = \frac{2\pi}{86400},$$

et, en supposant $h = 158,5$, $\lambda = 51^\circ$, on trouve

$$e = 0^{\mathrm{m}},0276,$$

chiffre qui diffère peu de la moyenne 0,0283 des résultats des expériences de Reech, dans les mines de Freyberg.

SUR L'HYPERBOLOÏDE DE RÉVOLUTION;

PAR M. J. MISTER,
Répétiteur d'Analyse à l'École du Génie civil de Belgique.

Démontrer géométriquement qu'étant données deux droites non situées dans un même plan, si l'une d'elles tourne autour de l'autre, elle engendre un hyperboloïde de révolution, c'est-à-dire une surface dont la courbe méridienne est une hyperbole.

M. Morel (*voir* 2[e] série, t. VIII, p. 273) s'est déjà occupé de cette question; mais la démonstration qu'il en a donnée suppose connues les principales propriétés de cette surface; elle s'appuie en outre sur un théorème qui n'a été établi que par le secours du calcul intégral. Sa démonstration est donc loin d'être élémentaire et géométrique. Nous croyons qu'on peut lui substituer avantageusement la suivante, qui ne suppose connue aucune des propriétés de l'hyperbole ou de l'hyperboloïde, et qui se fonde simplement sur la définition géométrique de cette courbe.

Soit OA (*) la plus courte distance entre les deux droites. Pendant la rotation, cette droite décrira le cercle de gorge dont nous représenterons le rayon par r. Considérons la droite AM dans une position quelconque; soit ZOX le plan du méridien et M l'intersection de la droite avec ce méridien; abaissons MP perpendiculaire sur OX, la droite AM se projettera sur le plan de cercle de gorge, suivant la droite AP tangente au cercle. Soit

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

α l'inclinaison constante de la droite AM sur le plan du cercle de gorge; tirons la droite OC faisant avec OX l'angle α, et menons CF, C'F' tangentes au cercle. Joignons ensuite le point M aux deux points F et F' ainsi obtenus. Les propriétés élémentaires des triangles rectangles OAP, OCF, MAP donneront

(1) $$\overline{MF}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{FP}^2,$$

$$MP = AP \operatorname{tang}\alpha = \sqrt{\overline{OP}^2 - r^2} \operatorname{tang}\alpha,$$

$$OF = \frac{r}{\cos\alpha} \quad \text{et} \quad FP = OP - OF = OP - \frac{r}{\cos\alpha}.$$

Substituons dans l'égalité (1), elle devient

$$\overline{MF}^2 = \left(\overline{OP}^2 - r^2\right)\operatorname{tang}^2\alpha + \overline{OP}^2 + \frac{r^2}{\cos^2\alpha} - \frac{2\,OP.r}{\cos\alpha},$$

ou

$$\overline{MF}^2 = \frac{\overline{OP}^2}{\cos^2\alpha} + r^2 - \frac{2\,OP.r}{\cos\alpha} = \left(\frac{OP}{\cos\alpha} - r\right)^2,$$

et, par suite,

$$MF = \frac{OP}{\cos\alpha} - r.$$

On aurait de même

$$MF' = \frac{OP}{\cos\alpha} + r.$$

On en déduit

$$MF' - MF = 2r.$$

Le lieu des points M est donc une hyperbole dont F et F' sont les foyers, et dont l'axe transverse est égal à $2r$.

NOUVELLE DÉMONSTRATION DE LA LOI DE RÉCIPROCITÉ DE LEGENDRE;

PAR M. ZOLOTAREFF,
Privatdocent à l'Université de Saint-Pétersbourg.

Soit p un nombre premier impair. Étant donnée une suite de nombres

(1) $$1,\quad 2,\quad 3,\ldots,\quad p-1,$$

si l'on y permute d'une manière quelconque les éléments, on aura une autre disposition

(2) $$\mu,\quad \mu',\quad \mu'',\ldots.$$

On sait que toutes les $1.2.3\ldots(p-1)$ dispositions possibles se partagent en deux classes, contenant chacune $\frac{1.2.3\ldots(p-1)}{2}$ dispositions. Les dispositions qui forment la première classe se déduisent de (1) au moyen d'un nombre pair de transpositions, et celles qui forment la seconde classe se déduisent de (1) au moyen d'un nombre impair de transpositions. Nous dirons, pour abréger, que le caractère de la disposition est égal à $+1$ ou à -1, suivant que cette disposition appartiendra à la première ou à la seconde classe.

Cela posé, nous allons démontrer la proposition suivante :

THÉORÈME I. — *Soit k un nombre entier quelconque non divisible par p. Le caractère de la suite*

3) $$k,\quad 2k,\quad 3k,\ldots,\quad (p-1)k,$$

si l'on y remplace les éléments par leurs résidus par

rapport au module p qui se trouvent dans la série (1), *est égal à* $\left(\frac{k}{p}\right)$.

Démonstration. — Soit a l'une des racines primitives du nombre p. La suite des nombres

$$(4)\qquad 1,\quad a,\quad a^2,\ldots,\quad a^{p-2},$$

si l'on y remplace chaque nombre par son résidu positif moindre que p, aura les mêmes éléments que la suite (1).

Posons

$$k \equiv a^f \pmod{p},$$

et considérons la suite des nombres

$$(5)\qquad a^f,\quad a^{f+1},\quad a^{f+2},\ldots,\quad a^{f+p-2},$$

à laquelle s'applique aussi la remarque qu'on vient de faire par rapport à la suite (4).

On peut évidemment passer de la disposition (4) à celle-ci (5), au moyen de f substitutions circulaires d'ordre $p-1$. En remarquant que toute substitution circulaire d'ordre $p-1$ est équivalente à $p-2$ transpositions, on voit qu'on passe de la suite (4) à la suite (5) au moyen de $(p-2)f$ transpositions. Il s'ensuit qu'en faisant les mêmes transpositions dans la disposition (1), c'est-à-dire en permutant circulairement f fois les nombres de cette suite congrus à $1, a, a^2, \ldots, a^{p-2}$, on arrivera à la disposition (3). En effet, après ces permutations, chaque nombre sera remplacé par un autre égal au premier multiplié par $a^f \equiv k \pmod{p}$, c'est-à-dire que la disposition (1) sera remplacée par la disposition (3). En remarquant que $p-2$ est un nombre impair, on conclut que le nombre $(p-2)f$ sera pair ou impair, suivant que f sera pair ou impair, c'est-à-dire suivant que k sera résidu ou non résidu quadratique de p. C. Q. F. D.

Laissant de côté les conséquences qui se déduisent du théorème précédent, relatives au caractère quadratique des nombres — 1 et 2, passons à la loi de réciprocité.

Soit q un autre nombre premier impair. Concevons qu'on déduise de la disposition

$$(6) \qquad 1,\ 2,\ 3,\ldots,\ p,\ p+1,\ldots,\ qp-1$$

une nouvelle disposition

$$(7) \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 p+1,\ \lambda_2 p+2,\ \lambda_3 p+3,\ldots,\ p,\ (\lambda_1+1)p+1, \\ \qquad (\lambda_2+1)p+2,\ldots,\ 2p,\ldots, \end{array}\right.$$

par le procédé suivant.

On ajoute aux éléments de la série (6), qui sont congrus à 1 par rapport au module p, le nombre $\lambda_1 p$; aux éléments congrus à 2, on ajoute $\lambda_2 p$ et ainsi de suite. λ_1, $\lambda_2,\ldots$ sont des nombres entiers quelconques; enfin les éléments de la suite (6), qui sont multiples de p, n'éprouvent aucun changement. Après cela, on remplace les éléments de la suite (7) par leurs résidus positifs par rapport au module pq, moindres que pq. Ce remplacement étant fait, il est facile de voir que la série (7) aura les mêmes éléments que la série (6), mais disposés dans un ordre différent.

Relativement à cette disposition on a :

Théorème II. — *La série* (7) *se déduit de la suite* (6) *au moyen d'un nombre pair de transpositions.*

En effet, ne considérant d'abord que les nombres de la série (7) congrus à 1 par rapport au module p,

$$\lambda_1 p+1,\ (\lambda_1+1)p+1,\ldots,\ (\lambda_1+q-1)p+1,$$

on voit qu'au moyen de substitutions circulaires d'ordre q, on peut ramener cette disposition à celle-ci

$$1,\ p+1,\ 2p+1,\ldots,\ (q-1)p+1.$$

Toute substitution circulaire d'ordre q étant équivalente à $q-1$ transpositions, c'est-à-dire à un nombre pair de transpositions, il s'ensuit que le nombre de toutes les transpositions relatives aux éléments congrus à 1 sera pair. La même conclusion aura lieu pour les éléments congrus à 2, 3,..., et par conséquent le nombre des transpositions au moyen desquelles on passe de la disposition (6) à la disposition (7) sera pair.

Théorème III. — *Le caractère de la suite*

$$(8)\quad \begin{cases} q, \quad 2q, \ldots, \quad (p-1)q, \quad 1, \quad 1+q, \quad 1+2q, \ldots, \\ \qquad\qquad 1+(p-1)q, \quad 2, \quad 2+q, \ldots, \end{cases}$$

qui se distingue de la suite (6) *par la disposition de ses éléments, en ce qu'on y trouve d'abord* $p-1$ *nombres congrus à* 0 (mod. q), *ensuite* $p-1$ *nombres congrus à* 1, *et ainsi de suite, est égal à* $(-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$.

Pour démontrer ce théorème, il faut compter le nombre de transpositions au moyen desquelles on passe de la disposition (8) à la disposition (6).

Pour cela, dans la disposition (8), on fait arriver 1 à la première place au moyen de $p-1$ transpositions, ensuite 2 à la seconde place au moyen de $2(p-1)$ transpositions, et ainsi de suite, enfin $q-1$ à la $(q-1)^{ième}$ place au moyen de $(q-1)(p-1)$ transpositions. Ainsi, en faisant

$$p-1+2(p-1)+\ldots+(q-1)(p-1)=\frac{q(q-1)}{2}(p-1)$$

transpositions, on passe de la suite (8) à celle-ci

$$1, \quad 2, \quad 3, \ldots, \quad q-1, \quad q, \quad 2q, \ldots, \quad (p-1)q,$$
$$1+q, \quad 1+2q, \ldots.$$

Après cela, en faisant encore $\frac{q(q-1)}{2}(p-2)$ transpositions, on arrivera à la disposition

$$1,\quad 2,\quad 3,\ldots,\quad q-1,\quad q,\quad 1+q,\quad 2+q,\ldots,$$
$$2q-1,\quad 2q,\quad 3q,\ldots,\quad (p-1)q,\ldots.$$

Donc, en continuant la même marche, on verra qu'après avoir fait

$$\frac{q(q-1)}{2}(p-1+p-2+\ldots+1)=\frac{q(q-1)}{2}\frac{p(p-1)}{2}$$

transpositions, on arrivera à la disposition (6).

Le nombre

$$\frac{q(q-1)}{2}\frac{p(p-1)}{2}$$

sera pair ou impair, suivant que $\frac{q-1}{2}\frac{p-1}{2}$ sera pair ou impair; par conséquent le théorème est démontré.

Considérons maintenant une suite de nombres

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{l} q,\quad 2q,\ldots,\quad (p-1)q,\quad p,\quad p+q,\ldots, \\ \quad p+(p-1)q,\quad 2p,\quad 2p+q,\ldots, \end{array}\right.$$

contenant d'abord $p-1$ nombres divisibles par q, ensuite p nombres congrus à p (mod. q), p nombres congrus à $2p$, et ainsi de suite, enfin p nombres congrus à $(q-1)p$. Si, au lieu de ces nombres, on prend leurs résidus positifs par rapport au module pq, moindres que pq, on aura tous les éléments de la suite (6).

Cela posé, nous allons démontrer que le caractère de la disposition (9) est égal à $\left(\frac{q}{p}\right)$.

En effet, les nombres

$$q, \quad 2q, \ldots, \quad (p-1)q$$

peuvent être représentés comme il suit :

$$\begin{aligned} q &= \lambda_1 p + \alpha, \\ 2q &= \lambda_2 p + \alpha_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ (p-1)q &= \lambda_{p-1} p + \alpha_{p-1}, \end{aligned}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{p-1}$ sont des nombres entiers, et où la suite des nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p-1}$ est la même que la suite

$$1, \quad 2, \quad 3, \ldots, \quad p-1;$$

on y trouve seulement les éléments dans une autre disposition. Le caractère de cette disposition, en vertu du théorème I, est égal à $\left(\frac{q}{p}\right)$.

Désignons par σ le nombre des transpositions par lesquelles on passe de la disposition

$$q, \quad 2q, \ldots, \quad (p-1)q$$

à celle-ci

$$\mu_1 p + 1, \quad \mu_2 p + 2, \ldots, \quad \mu_{p-1} p + p - 1,$$

où $\mu_1 = \lambda_i$, si $\alpha_i = 1$, où $\mu_2 = \lambda'_i$, si $\alpha'_i = 2, \ldots$. Il résulte de ce qui précède que σ sera un nombre pair ou impair, suivant que $\left(\frac{q}{p}\right) = 1$ ou que $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$.

En faisant de nouveau les mêmes transpositions dans la suite

$$p+q, \quad p+2q, \ldots, \quad p+(p-1)q,$$

nous arriverons à la suite

$$(\mu_1+1)p+1, \quad (\mu_2+1)p+2, \ldots, \quad (\mu_{p-1}+1)p+p-1.$$

Le même chose s'applique à la disposition

$$2p+q,\quad 2p+2q\ldots,\quad 2p+(p-1)q$$

et aux autres suites.

Nous avons donc à faire σq transpositions pour passer à la disposition (7), qui nous ramènera à la disposition (6) au moyen d'un nombre pair de transpositions (th. II). Il en résulte que le caractère de la suite (9) dépend de la parité du nombre σ. Il est donc égal à $\left(\frac{q}{p}\right)$.

On peut trouver une autre expression pour le caractère de la suite (9). Soient

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} p &= \rho_1 q + \beta_1,\\ 2p &= \rho_2 q + \beta_2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ (q-1)p &= \rho_{q-1} q + \beta_{q-1}. \end{aligned}\right.$$

La série de nombres

$$\beta_1,\quad \beta_2,\ldots,\quad \beta_{q-1}$$

contient les mêmes éléments que la série

$$1,\quad 2,\quad 3,\ldots,\quad q-1,$$

mais dans un ordre différent.

D'après ce qui précède, on voit que le caractère de cet ordre est égal à $\left(\frac{p}{q}\right)$. Remarquons que, sans changer le caractère de la suite, il est permis de faire des transpositions entre ses éléments, pourvu que le nombre de ces transpositions soit pair. Ainsi on peut faire des substitutions circulaires d'ordre q, puisque ces substitutions sont équivalentes à $q-1$ transpositions.

D'après cela, en considérant d'abord les nombres de la suite (9) congrus à p par rapport au module q, et en

remplaçant p par son expression (10), on voit qu'ils peuvent être rangés, au moyen de quelques substitutions circulaires, comme il suit :

$$\beta_1,\quad \beta_1+q,\quad \beta_1+2q,\ldots,\quad \beta_1+(p-1)q,$$

sans changer le caractère de la suite (9). De même les nombres congrus à $2p$ peuvent être écrits ainsi

$$\beta_2,\quad \beta_2+q,\quad \beta_2+2q,\ldots,\quad \beta_2+(p-1)q.$$

De sorte qu'au lieu de la disposition (9), on peut considérer la disposition

$$(11)\quad \left\{ \begin{array}{l} q,\ 2q,\ldots,\ (p-1)q,\ \beta_1,\ \beta_1+q,\ldots,\ \beta_1+(p-1)q, \\ \qquad \beta_2,\ \beta_2+q,\ldots,\ \beta_2+(p-1)q,\ldots. \end{array} \right.$$

Afin de déterminer le caractère de cette dernière suite, permutons les nombres

$$\beta_1,\quad \beta_2,\ldots,\quad \beta_{q-1},$$

en laissant les autres à leurs places. Supposons qu'au moyen de δ transpositions, cette disposition devienne

$$1,\quad 2\quad 3,\ldots,\quad q-1.$$

En faisant les transpositions correspondantes entre les nombres

$$\beta_1+q,\quad \beta_2+q,\ldots,\quad \beta_{q-1}+q,$$

nous arriverons à la disposition

$$1+q,\quad 2+q,\ldots,\quad q-1+q,$$

et ainsi de suite. En sorte que, après les δp transpositions, on aura, au lieu de la suite (11), celle-ci

$$q,\ 2q,\ldots,\ (p-1)q,\ 1+q,\ 2+q,\ldots,\ 1+2q,\ 2+2q,\ldots$$

Nous avons vu plus haut que le caractère de cette série est égal à $(-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$ (th. III).

En remarquant que δ est pair ou impair, suivant que $\left(\frac{p}{q}\right) = 1$ ou que $\left(\frac{p}{q}\right) = -1$, on en conclura que le caractère de la série (11) ou, ce qui revient au même, de la série (9) est égal à $\left(\frac{p}{q}\right)(-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$. Or on a démontré plus haut que le caractère de la même série est égal à $\left(\frac{q}{p}\right)$; on aura donc

$$\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{p}{q}\right)(-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}.$$

SURFACES DE RÉVOLUTION DU SECOND DEGRÉ;

PAR M. GEORGES DOSTOR.

---

1. *Conditions nécessaires pour qu'une surface du second degré soit de révolution.* — Supposons que l'équation générale

$$(1)\quad \begin{cases} f(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 \\ \qquad + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy \\ \qquad + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0 \end{cases}$$

représente une surface de révolution.

Admettons d'abord que les coefficients B, B', B'' des rectangles des trois variables soient tous différents de zéro.

Tous les plans conduits par l'axe de révolution sont des plans principaux, de sorte que, si α, β, γ désignent

les cosinus des angles de direction d'une droite quelconque perpendiculaire à l'axe, l'équation

$$\alpha f'_x + \beta f'_y + \gamma f'_z = 0,$$

ou celle développée

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} (A\alpha + B''\beta + B'\gamma)x + (B''\alpha + A'\beta + B\gamma)y \\ \quad + (B'\alpha + B\beta + A''\gamma)z + C\alpha + C'\beta + C''\gamma = 0 \end{array} \right.$$

représentera le plan méridien perpendiculaire à cette droite.

La perpendicularité de la droite (α, β, γ) et du plan (2) est d'ailleurs exprimée par l'égalité de rapports

$$\frac{A\alpha + B''\beta + B'\gamma}{\alpha} = \frac{B''\alpha + A'\beta + B\gamma}{\beta} = \frac{B'\alpha + B\beta + A''\gamma}{\gamma} = s,$$

s désignant la valeur commune de ces rapports.

Ces équations, qui reviennent à

$$\begin{aligned} (A - s)\alpha + B''\beta + B'\gamma &= 0, \\ B''\alpha + (A' - s)\beta + B\gamma &= 0, \\ B'\alpha + B\beta + (A'' - s)\gamma &= 0, \end{aligned}$$

peuvent se transformer. Pour cela, multiplions la première par B, la seconde par B', la troisième par B'', et ajoutons aux deux membres des égalités résultantes les quantités respectives $B'B''\alpha$, $B''B\beta$, $BB'\gamma$; nous trouvons ainsi les relations

$$\begin{aligned} & B'B''\alpha + B''B\beta + BB'\gamma \\ & = [(s - A)B + B'B'']\alpha \\ & = [(s - A')B' + B''B]\beta \\ & = [(s - A'')B'' + BB']\gamma. \end{aligned}$$

Cela obtenu, nous ferons observer que toute droite perpendiculaire à l'axe est normale à l'un des plans mé-

ridiens, lesquels existent en nombre infini; par conséquent, les relations précédentes doivent exister pour une infinité de valeurs de α, β, γ. Il faudra donc que l'on ait séparément

$$(3)\quad \begin{cases} B'B''\alpha + B''B\beta + BB'\gamma = 0, \\ (s - A)B + B'B'' = (s - A')B' + B''B = (s - A'')B'' + BB' = 0, \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$(\mathrm{I})\qquad s = A - \frac{B'B''}{B} = A' - \frac{B''B}{B'} = A'' - \frac{BB'}{B''}.$$

Telles sont les *conditions nécessaires* pour que l'équation (1) du second degré représente une surface de révolution.

2. *Autre expression de ces conditions.* — Posons

$$(4)\qquad S + 2s = A + A' + A''.$$

Si nous ajoutons les deux dernières valeurs (I) de s, nous avons

$$2s = A' + A'' - \frac{B''B}{B'} - \frac{BB'}{B''},$$

qui, étant retranché de (4), donne

$$S = A + \frac{B''B}{B'} + \frac{BB'}{B''}.$$

Les conditions (I) peuvent donc aussi se mettre sous la forme

$$(\mathrm{II})\quad \begin{cases} S = A + \dfrac{B''B}{B'} + \dfrac{BB'}{B''} = A' + \dfrac{BB'}{B''} + \dfrac{B'B''}{B} \\ \quad = A' + \dfrac{B'B''}{B} + \dfrac{B''B}{B'}, \end{cases}$$

dont l'emploi se présentera plus loin au n° 6.

3. *Les conditions* (I) *sont suffisantes.* — En d'autres termes, si elles sont remplies, on pourra trouver une droite telle que chacun de ses points (x_1, y_1, z_1) soit le centre d'une sphère dont les intersections avec la surface (1) soient situées dans deux plans parallèles, et si

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = R^2$$

est l'équation d'une de ces sphères, l'équation des deux plans parallèles d'intersection sera

$$(5) \left\{ \begin{aligned} & Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy \\ & \quad + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D \\ & \quad - s[(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 - R^2] = 0. \end{aligned} \right.$$

En effet, la surface que représente l'équation (5) se réduira à deux plans parallèles, si elle admet une infinité de centres situés dans un même plan, c'est-à-dire si les trois équations

$$\begin{aligned} Ax + B''y + B'z + C - s(x - x_1) &= 0, \\ B''x + A'y + Bz + C' - s(y - y_1) &= 0, \\ B'x + By + A''z + C'' - s(z - z_1) &= 0, \end{aligned}$$

qui déterminent les coordonnées du centre, se réduisent à une seule. Or, si nous remplaçons dans ces équations $A - s$, $A' - s$, $A'' - s$ par leurs valeurs $\frac{B'B''}{B}$, $\frac{B''B}{B'}$, $\frac{BB'}{B''}$ tirées des relations (I), elles deviennent

$$\frac{B'B''}{B}x + B''y + B'z + sx_1 + C = 0,$$

$$B''x + \frac{B''B}{B'}y + Bz + sy_1 + C' = 0,$$

$$B'x + By + \frac{BB'}{B''}z + sz_1 + C'' = 0,$$

ou bien

$$B'B''x + B''By + BB'z + B(sx_1 + C) = 0,$$
$$B'B''x + B''By + BB'z + B'(sy_1 + C') = 0,$$
$$B'B''x + B''By + BB'z + B''(sz_1 + C'') = 0;$$

et celles-ci seront identiques, si l'on a

$$B(sx_1 + C) = B'(sy_1 + C') = B''(sz_1 + C''),$$

c'est-à-dire si le centre (x_1, y_1, z_1) de la sphère d'intersection appartient à la droite

$$\text{(III)} \qquad B(sx + C) = B'(sy + C') = B''(sz + C'').$$

Donc, *si les conditions* (I) *sont remplies, l'équation* (1) *représentera une surface de révolution autour de la droite* (III).

4. *Équation de l'axe de révolution.* — Les équations (III) sont celles de l'axe de révolution. On peut leur donner une autre forme. Mettons-y, en effet, à la place de s, les trois valeurs respectives (I), elles deviendront

$$\text{(IV)} \quad \left\{ \begin{aligned} (AB - B'B'')x + BC &= (A'B' - B''B)y + B'C' \\ &= (A''B'' - BB')z + B''C''. \end{aligned} \right.$$

Si nous ajoutons à tous les membres de ces égalités la même quantité $B'B''x + B''By + BB'z$, elles pourront s'écrire

$$\begin{aligned} B(Ax + B''y + B'z + C) &= B'(B''x + A'y + Bz + C') \\ &= B''(B'x + By + A''z + C''), \end{aligned}$$

ou bien

$$\text{(V)} \qquad Bf'_x = B'f'_y = B''f'_z.$$

Telle est la *forme implicite des équations de l'axe dans les surfaces de révolution du second degré.*

5. *Équation du plan de l'équateur.* — Soient λ, μ, ν les cosinus des angles d'inclinaison de l'axe de révolution sur les axes de coordonnées; le plan principal perpendiculaire à l'axe sera représenté par

$$\lambda f'_x + \mu f'_y + \nu f'_z = 0.$$

Or, en vertu de (III), ces cosinus sont proportionnels aux inverses $\frac{1}{B}$, $\frac{1}{B'}$, $\frac{1}{B''}$; par conséquent, l'équation du plan de l'équateur sera

$$\text{(VI)} \qquad \frac{f'_x}{B} + \frac{f'_y}{B'} + \frac{f'_z}{B''} = 0.$$

6. *Équation développée du plan de l'équateur.* — Remplaçons dans (VI) les dérivées par leurs développements, et ordonnons par rapport à x, y, z; nous aurons

$$\frac{x}{B}\left(A + \frac{B''B}{B'} + \frac{BB'}{B''}\right) + \frac{y}{B'}\left(A' + \frac{BB'}{B''} + \frac{B'B''}{B}\right)$$
$$+ \frac{z}{B''}\left(A'' + \frac{B'B''}{B} + \frac{B''B}{B'}\right) + \left(\frac{C}{B} + \frac{C'}{B'} + \frac{C''}{B''}\right) = 0,$$

et, par suite des relations (II),

$$\text{(VII)} \qquad S\left(\frac{x}{B} + \frac{y}{B'} + \frac{z}{B''}\right) + \left(\frac{C}{B} + \frac{C'}{B'} + \frac{C''}{B''}\right) = 0.$$

Telle est l'équation du plan équatorial. Elle peut encore se mettre sous la forme

$$\text{(VIII)} \qquad \frac{Sx + C}{B} + \frac{Sy + C'}{B'} + \frac{Sz + C''}{B''} = 0,$$

qui présente une certaine analogie avec les équations (III) de l'axe de révolution.

7. *Équation générale des plans méridiens.* — Ces

plans, passant par l'axe, sont représentés par l'équation

$$\text{(IX)} \qquad Bf'_x + mB'f'_y - (1+m)B''f'_z = 0,$$

ou encore par

$$\text{(X)} \quad B(sx + C) + mB'(sy + C') - (1+m)B''(sz + C'') = 0.$$

8. *Séparation des surfaces de révolution du second degré.* — La surface de révolution que représente l'équation (1) sera un ellipsoïde ou un hyperboloïde, un paraboloïde ou un cylindre, suivant qu'elle admettra un seul plan équatorial situé à une distance finie, un seul plan équatorial rejeté à l'infini, ou une infinité de plans équatoriaux parallèles. Donc

Lorsque la surface du second degré (1) *est de révolution, son équation représentera*

1° *Un ellipsoïde ou un hyperboloïde, si les quantités égales*

$$S = A + \frac{B''B}{B'} + \frac{BB'}{B''} = A' + \frac{BB'}{B''} + \frac{B'B''}{B}$$
$$= A'' + \frac{B'B''}{B} + \frac{B''B}{B'}$$

sont différentes de zéro ;

2° *Un paraboloïde, si ces mêmes quantités sont égales à zéro, pendant que la quantité* $\frac{C}{B} + \frac{C'}{B'} + \frac{C''}{B''}$ *est différente de zéro ;*

3° *Un cylindre,* si les quantités S et $\frac{C}{B} + \frac{C'}{B'} + \frac{C''}{B''}$ sont toutes égales à zéro.

PREMIER CAS PARTICULIER.

L'un des trois coefficients B, B', B'' *est nul.*

9. Supposons que l'un des trois rectangles des variables manque dans l'équation de la surface, celui de yz

par exemple, de sorte que $B = 0$. Les trois équations en s, α, β, γ du n° 1 se réduisent à

$$(A - s)\alpha + B''\beta + B'\gamma = 0,$$
$$B''\alpha + (A' - s)\beta = 0,$$
$$B'\alpha + (A'' - s)\gamma = 0.$$

Éliminons α entre la première de ces équations et chacune des deux autres; nous obtenons les égalités

$$[B''^2 - (A - s)(A' - s)]\beta + B'B''\gamma = 0,$$
$$[B'^2 - (A'' - s)(A - s)]\gamma + B'B''\beta = 0,$$

qui, devant avoir lieu pour une infinité de valeurs de β et γ, exigent que l'on ait à la fois

$$(6) \quad B''^2 - (A - s)(A' - s) = 0,\; B'^2 - (A'' - s)(A - s) = 0,\; B'B'' = 0.$$

La dernière condition n'est satisfaite que si l'un des deux autres coefficients B', B'' est nul. Donc

Pour qu'une équation du second degré, qui ne contient pas à la fois les trois rectangles des variables, représente une surface de révolution, il faut que deux de ces rectangles manquent dans l'équation.

10. Admettons que B' soit nul en même temps que B. Les deux premières des relations de condition (6) seront

$$B''^2 = (A - s)(A' - s), \quad (A'' - s)(A - s) = 0.$$

La première de ces égalités exige que s soit différent de A, de sorte que la seconde ne saurait être satisfaite que par $s = A''$. On a ainsi

$$(\text{XI}) \quad B''^2 = (A - A'')(A' - A'') = (A'' - A')(A'' - A').$$

Donc, *pour qu'une équation du second degré, qui ne contient que l'un des rectangles des variables, re-*

présente une surface de révolution, il faut que le demi-coefficient de ce rectangle soit moyen proportionnel entre les deux excès du coefficient qui affecte le carré de la variable absente dans ce rectangle, sur les coefficients des carrés des deux autres variables.

11. *Ces conditions sont suffisantes,* c'est-à-dire que l'équation (1) représentera une surface de révolution, si l'on a

$$(7) \qquad B = 0, \quad B' = 0, \quad B''^2 = (A'' - A)(A'' - A').$$

Dans ce cas, les équations du n° 3, qui déterminent le centre de la surface (5) passant par l'intersection de la surface du second degré (1) et de notre sphère, seront

$$\begin{aligned} (A - A'')x + B''y + A''x_1 + C &= 0, \\ B''x + (A' - A'')y + A''y_1 + C' &= 0, \\ A''z_1 + C'' &= 0. \end{aligned}$$

Les deux premières peuvent être remplacées par

$$B''(A - A'')x + B''^2 y + B''(A''x_1 + C) = 0,$$
$$B''(A - A'')x + (A - A'')(A' - A'')y + (A - A'')(A''y_1 + C') = 0.$$

On voit par (XI) que ces trois équations seront identiquement satisfaites et se réduiront à une seule, si l'on a

$$A''z_1 + C'' = 0, \quad B''(A''x_1 + C) = (A - A'')(A''y_1 + C'),$$

c'est-à-dire si le centre de la sphère d'intersection appartient à la droite

$$(\text{XII}) \qquad \frac{A''x + C}{A - A''} = \frac{A''y + C'}{B''}, \quad A''z + C'' = 0.$$

Donc *l'équation* (1) *représente une surface de révolution autour de la droite* (XII).

En vertu de la relation (XI), les *équations de l'axe de révolution* seront

$$(XIII)\quad \frac{A''x + C}{A''y + C'} = \pm\sqrt{\frac{A - A''}{A' - A''}},\quad A''z + C'' = o,$$

suivant que B″ sera positif ou négatif. *Cet axe est parallèle au plan des xy.*

12. *Nature de la surface de révolution.* — Les coordonnées a, b, c du centre de la surface seront fournies par le système des équations

$$\begin{aligned} Ax + B''y + C &= o,\\ B''x + A'y + C' &= o,\\ A''z + C'' &= o, \end{aligned}$$

qui donnent, eu égard à (XI),

$$(XIV)\quad a = \frac{B''C' - A'C}{A''(A + A' - A'')},\ b = \frac{B''C - AC'}{A''(A + A' - A'')},\ c = -\frac{C''}{A''}.$$

Ces valeurs sont finies, tant que A″ est différent de A + A′; dans ce cas, la surface est un *ellipsoïde*, un *hyperboloïde* ou un *cône de révolution,* et l'*équation du plan équatorial,* parallèle à l'axe des z, est

$$(XV)\quad x\sqrt{A - A''} \pm y\sqrt{A' - A''} + \frac{C\sqrt{A - A''} \pm C'\sqrt{A' - A''}}{A + A' - A''} = o.$$

Si l'on a $A + A' = A''$, ce qui donne $B''^2 = AA'$, la surface sera toujours un *paraboloïde de révolution.*

Si l'on a en même temps

$$A + A' = A'',\quad C\sqrt{A'} + C'\sqrt{A} = o,$$

la surface sera un *cylindre de révolution.*

Nous n'avons pas examiné le cas où, avec $B = o$, $B' = o$, $B''^2 = (A - A'')(A' - A'')$, on aurait en même

temps $A'' = 0$; car, dans ce cas, l'équation de la surface se réduirait à

$$(x\sqrt{A} \pm y\sqrt{A'})^2 + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0,$$

et représenterait un cylindre parabolique.

DEUXIÈME CAS PARTICULIER.

Les trois coefficients B, B', B'' *sont nuls.*

13. L'équation de la surface sera

$$(8) \quad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0,$$

et ne pourra exprimer une surface de révolution que si deux des trois coefficients A, A', A'' sont égaux. Supposons $A = A'$. L'équation (8) pourra s'écrire

$$\frac{1}{A}(Ax + C)^2 + \frac{1}{A'}(Ay + C')^2 + \frac{1}{A''}(A''z + C'')^2 - \left(\frac{C^2 + C'^2}{A} + \frac{C''^2}{A''}\right) + D = 0.$$

Elle représentera toujours une surface de révolution.

1° Pour $A'' > 0$, cette surface sera un *ellipsoïde réel*, un *point* ou un *ellipsoïde imaginaire*, suivant que le terme D, indépendant des variables, sera inférieur, égal ou supérieur à $\dfrac{C^2 + C'^2}{A} + \dfrac{C''^2}{A''}$.

2° Pour $A'' < 0$, elle sera un *hyperboloïde à une nappe*, un *cône* ou un *hyperboloïde à deux nappes*, suivant que D est inférieur, égal ou supérieur à

$$\frac{C^2 + C'^2}{A} + \frac{C''^2}{A''}.$$

3° Si A'' est nul et C'' diffèrent de zéro, la surface de révolution est un *paraboloïde*.

4° Enfin, pour $A''=0$, $C''=0$, elle est un *cylindre réel*, une *droite* ou un *cylindre imaginaire*, suivant que D sera inférieur, égal ou supérieur à $\frac{C^2+C'^2}{A}$.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

Composition de Mathématiques.

Par un point fixe A, pris sur une surface du second degré donnée, on mène tous les plans qui coupent la surface suivant des courbes dont l'un des sommets est en A :

1° Trouver le lieu de celui des axes de la section qui passe par le point A ;

2° Trouver le lieu du point où le diamètre conjugué du plan sécant, relativement à la surface donnée, rencontre le plan tangent à cette surface au point A ;

3° Construire ce dernier lieu dans le cas où le plan tangent en A coupe la surface donnée suivant deux droites rectangulaires.

Composition de Physique.

I.

1° Pourquoi prend-on la densité des gaz par rapport à l'air, tandis qu'on prend celles des autres corps par rapport à l'eau?

2° Dans ses expériences sur la densité des gaz, M. Regnault se servait d'un ballon qui pouvait contenir $12^{gr},778$ d'air sec à zéro, sous la pression de 760 millimètres. Étant ouvert dans l'air, ce ballon pesait $1258^{gr},55$; rempli d'eau à zéro et fermé, il pesait

11126gr,05. Les deux pesées ont été faites dans une chambre où la température était de 6 degrés et la pression de 758 millimètres. On demande de calculer d'après ces données le poids du litre d'air. (On prendra le coefficient de dilatation de l'air égal à $\frac{1}{273}$ et la densité de l'eau à zéro égale à 0,99988 : on ne tiendra pas compte de l'humidité de l'air de la chambre.)

II.

1° On suspend horizontalement au fil métallique d'une balance de torsion un barreau d'acier trempé, non aimanté, et on le fait osciller; on trouve que la durée de son oscillation est t.

2° On aimante ensuite ce barreau et on le remet en place. Supposons qu'avant son aimantation il ait été en équilibre dans le méridien magnétique, il y restera encore après. Si alors on veut l'en écarter de 30 degrés, on trouve qu'il faut tourner le micromètre de 120 degrés.

3° Enfin on remplace le fil métallique par un faisceau de fil sans torsion, et l'on fait de nouveau osciller le barreau : on trouve que la durée de son oscillation est t'.

Quel rapport y a-t-il entre t' et t?

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1872.

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

Mathématiques. — Étant donné un prisme triangulaire droit, on le coupe par des plans rencontrant les trois arêtes, de telle manière que les volumes des troncs de prisme obtenus soient dans un rapport donné :

1° trouver la surface engendrée par le centre de gravité de l'un des troncs de prisme, quand le plan sécant se déplace sans cesser de rencontrer les trois arêtes; 2° trouver les courbes qui forment les contours de cette surface.

On examinera en particulier le cas où le prisme donné a pour bases des triangles équilatéraux.

Physique. — Lois expérimentales des phénomènes capillaires.

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

Mathématiques. — Un ballon a été observé en même temps de trois stations situées dans un plan horizontal et qui sont les sommets d'un triangle dont les côtés ont des longueurs données. On a mesuré les angles formés avec le plan horizontal par les rayons visuels dirigés vers le ballon. On demande la hauteur du ballon au-dessus du plan des stations. Examiner le cas où les stations sont les sommets d'un triangle équilatéral (*).

Physique. — Mélange des gaz et des vapeurs. — Lunette astronomique.

CONCOURS DES DÉPARTEMENTS (1872).

Concours académique de Bordeaux.

Mathématiques élémentaires. — Dans un triangle ABC, dont l'angle A est connu, ainsi que la direction des droites AD, AE, qui divisent cet angle en trois parties égales, on donne, de plus, les segments extrêmes BD, CE, que ces droites déterminent sur la base BC. Calculer,

(*) Un problème tout à fait analogue a été traité par M. Desboves, dans ses *Questions de Trigonométrie*. Le ballon était remplacé par le sommet d'une tour (*voir* l'ouvrage cité, p. 263, probl. 15).

d'après ces données, les éléments du triangle, et construire ce triangle géométriquement. On examinera en particulier le cas où l'angle A est droit.

Nota. — M. Niewenglowski, professeur au Lycée de Mont-de-Marsan, qui a bien voulu nous communiquer cet énoncé, en donne une solution très-simple, fondée sur les propriétés des rapports anharmoniques.

Concours académique de Caen.

Mathématiques élémentaires. — On donne un cercle et deux tangentes; on demande d'en mener une troisième dont la partie interceptée entre les deux autres ait une longueur donnée.

Nota. — M. Taratte, professeur au Lycée d'Évreux, qui a bien voulu nous communiquer cet énoncé, en donne une solution accompagnée d'une discussion détaillée. On peut d'ailleurs remarquer que ce problème se ramène immédiatement au suivant : *Construire un triangle* ABC, *connaissant la base* AB, *l'angle opposé* C *et la somme des deux derniers côtés* AC, BC, dont la solution n'offre pas de difficulté.

RECTIFICATION

relative à la Note insérée au tome X (2e série), année 1871, p. 481;

PAR M. L. PAINVIN.

1. Dans la première partie de la proposition énoncée à la page 481 du tome X (2e série), année 1871, j'ai dit que la surface engendrée était de l'ordre $4m$; en réalité, elle n'est que de l'ordre $2m$. Les formules écrites à la

page 483 donnent λ et μ comme des fonctions du second degré en x, y, z; et, s'il en était ainsi, il serait parfaitement exact de conclure que la surface engendrée est de l'ordre $4m$; mais, lorsqu'on fait le calcul d'une manière plus complète, on constate que les seconds membres se réduisent à des fonctions du premier degré, et la surface engendrée n'est plus alors que de l'ordre $2m$.

Je vais donc donner la résolution explicite des équations qui établissent la correspondance entre les points des deux surfaces.

2. Voici l'énoncé :

Soient donnés trois points fixes A, B, C *et une surface fixe* Σ *du* $m^{\text{ième}}$ *ordre; on imagine un point* M *se déplaçant sur la surface* Σ; *puis, avec trois autres points fixes* A′, B′, C′, *donnés dans l'espace, on construit une pyramide* A′B′C′S *telle qu'on ait toujours, quelle que soit la position du point* M *sur la surface* Σ,

$$SA' = MA, \quad SB' = MB, \quad SC' = MC;$$

le point S *décrira une surface* (S) *d'ordre* $2m$ *en général.*

Nous prendrons pour plan des x, y le plan des trois points A, B, C; soient alors

$$\alpha, \beta, 0; \quad \alpha_1, \beta_1, 0; \quad \alpha_2, \beta_2, 0$$

les coordonnées respectives des points A, B, C; puis

$$a, b, c; \quad a_1, b_1, c_1; \quad a_2, b_2, c_2$$

celles des points A′, B′, C′; désignons enfin par λ, μ, ν les coordonnées du point M, et par x, y, z celles du point *correspondant* S. D'après l'énoncé, les équations qui établissent la correspondance des deux points M et S

seront

$$(1)\quad \begin{cases} (\lambda-\alpha)^2+(\mu-\beta)^2+\nu^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2, \\ (\lambda-\alpha_1)^2+(\mu-\beta_1)^2+\nu^2=(x-a_1)^2+(y-b_1)^2+(z-c_1)^2, \\ (\lambda-\alpha_2)^2+(\mu-\beta_2)^2+\nu^2=(x-a_2)^2+(y-b_2)^2+(z-c_2)^2. \end{cases}$$

Il s'agit de résoudre les trois équations (1) par rapport à λ, μ, ν.

Dans ce but, nous poserons

$$(2)\quad \begin{cases} \rho\ =\alpha^2+\beta^2, & R\ =a^2+b^2+c^2, \\ \rho_1=\alpha_1^2+\beta_1^2, & R_1=a_1^2+b_1^2+c_1^2, \\ \rho_2=\alpha_2^2+\beta_2^2; & R_2=a_2^2+b_2^2+c_2^2; \end{cases}$$

puis

$$(3)\quad \Delta=\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix},$$

où

$$\gamma=\gamma_1=\gamma_2=1;$$

la signification géométrique des quantités $\rho,\ldots$, $R,\ldots$, Δ est visible.

Ceci admis, les équations (1) peuvent s'écrire

$$(4)\quad \begin{cases} \lambda^2+\mu^2+\nu^2-2\alpha\lambda-2\beta\mu \\ \qquad =x^2+y^2+z^2-2(ax+by+cz)+R-\rho, \\ \lambda^2+\mu^2+\nu^2-2\alpha_1\lambda-2\beta_1\mu \\ \qquad =x^2+y^2+z^2-2(a_1x+b_1y+c_1z)+R_1-\rho_1, \\ \lambda^2+\mu^2+\nu^2-2\alpha_2\lambda-2\beta_2\mu \\ \qquad =x^2+y^2+z^2-2(a_2x+b_2y+c_2z)+R_2-\rho_2. \end{cases}$$

Multiplions ces équations respectivement par $\frac{d\Delta}{d\alpha}$, $\frac{d\Delta}{d\alpha_1}$, $\frac{d\Delta}{d\alpha_2}$; puis par $\frac{d\Delta}{d\beta}$, $\frac{d\Delta}{d\beta_1}$, $\frac{d\Delta}{d\beta_2}$; enfin par $\frac{d\Delta}{d\gamma}$, $\frac{d\Delta}{d\gamma_1}$, $\frac{d\Delta}{d\gamma_2}$, et

ajoutons. On obtient alors les trois équations

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}
&\lambda \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & 1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ax + by + cz + \frac{\rho - R}{2} & \beta & 1 \\ a_1x + b_1y + c_1z + \frac{\rho_1 - R_1}{2} & \beta_1 & 1 \\ a_2x + b_2y + c_2z + \frac{\rho_2 - R_2}{2} & \beta_2 & 1 \end{vmatrix}, \\
&\mu \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & 1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & ax + by + cz + \frac{\rho - R}{2} & 1 \\ \alpha_1 & a_1x + b_1y + c_1z + \frac{\rho_1 - R_1}{2} & 1 \\ \alpha_2 & a_2x + b_2y + c_2z + \frac{\rho_2 - R_2}{2} & 1 \end{vmatrix}, \\
&[\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 - (x^2 + y^2 + z^2)] \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & 1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 1 \end{vmatrix} \\
&\qquad = -2 \begin{vmatrix} \alpha & \beta & ax + by + cz + \frac{\rho - R}{2} \\ \alpha_1 & \beta_1 & a_1x + b_1y + c_1z + \frac{\rho_1 - R_1}{2} \\ \alpha_2 & \beta_2 & a_2x + b_2y + c_2z + \frac{\rho_2 - R_2}{2} \end{vmatrix}.
\end{aligned}\right.$$

Les équations (5) résolvent complétement la question; on voit que λ et μ sont des fonctions linéaires de x, y, z, et que ν^2 est une fonction du second degré en x, y, z; par conséquent, si la surface directrice (Σ)

$$F(\lambda, \mu, \nu) = 0$$

est de l'ordre m, la surface engendrée (S) sera de l'ordre $2m$.

Je n'entrerai, pour le moment, dans aucun détail sur

les conséquences multiples qu'on peut tirer de ce mode de transformation, qui comprend d'ailleurs, comme cas particulier, la transformation de Jacobi.

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une Lettre de M. Ch. Ruchonnet, de Lausanne. — « Dans le numéro de mai des *Nouvelles Annales* a paru un article où M. Ph. Gilbert conteste l'exactitude de l'expression que j'ai donnée dans votre cahier d'octobre 1870, de la distance de la courbe à la sphère osculatrice dans le voisinage du point de contact. M. Gilbert pense qu'il doit y avoir quelque défaut dans le raisonnement qui m'a conduit à cette expression, parce que, de certaines formules qui sont en sa possession, il déduit une expression différente, savoir :

$$\delta = \frac{ds^4}{24 r^2 R},$$

où δ exprime la distance en question, ds un arc infiniment petit de la courbe donnée, et r, R le rayon du cercle osculateur et celui de la sphère osculatrice. Je crois mon raisonnement inattaquable et par conséquent ma formule exacte; mais, quoi qu'il en soit, on peut montrer que la valeur ci-dessus de δ est fausse. Il suffit pour cela de supposer que la courbe soit tracée sur une sphère. Alors, en effet, la distance de la courbe à la sphère osculatrice est rigoureusement nulle, parce que la sphère sur laquelle la courbe est tracée joue en chaque point de la courbe le rôle de sphère osculatrice. Et pourtant l'expression ci-dessus de δ ne s'annule point dans le cas d'une courbe sphérique. Elle attribue donc une valeur à la distance de la courbe à la sphère osculatrice, lorsque cette distance n'existe pas.

Dès lors, semble-t-il, elle ne saurait subsister. La valeur de δ, que j'ai donnée, se réduit au contraire à zéro dans le cas considéré, car elle contient comme facteur l'arc élémentaire de l'arête de rebroussement de la surface polaire, et cet arc est nul si la courbe est tracée sur une sphère, puisque alors l'arête se réduit à un point qui est le centre même de cette sphère. »

M. Catalan nous fait remarquer qu'à la page 257, au lieu de 37, il faut 38.

Société mathématique de Paris. — Dans son *Rapport sur les progrès de la Géométrie,* M. Chasles, après avoir demandé la création de deux nouvelles chaires de mathématiques, s'exprime ainsi :

« A ces considérations se rattache naturellement une réflexion qui intéresse au plus haut degré l'avenir de nos études mathématiques.

» On voit par ce qui précède que les mathématiques prennent, à l'étranger, des développements considérables. La variété et l'élévation des matières qui s'y traitent dans de nombreux recueils périodiques, depuis plusieurs années, le prouvent incontestablement. Mais un simple fait suffirait pour montrer aux yeux de tous combien nous devons craindre de nous laisser arriérer dans cette partie des sciences.

» Nous possédons dans notre Société philomathique une section des mathématiques, d'un nombre de membres limité, dont les communications ne paraissent que de loin en loin, avec d'autres matières, dans un *Bulletin* trimestriel fort restreint. Or il s'est formé à Londres, en 1865, une *Société mathématique* d'un certain nombre de membres, et le nombre s'en accroît encore; société dont les *Proceedings*, à l'instar de la Société royale de

Londres et des autres académies d'Angleterre, font connaître les travaux par des analyses plus ou moins étendues.

» Ce fait, auquel nous applaudissons, n'est-il pas, dans la culture des mathématiques, un élément de supériorité future qui doit nous préoccuper? »

En réponse à cet appel de M. Chasles, il vient de se former, à Paris, une Société dont peuvent faire partie tous ceux qui s'intéressent aux mathématiques. Nous extrayons des statuts les passages suivants :

Article premier. — La Société mathématique de Paris a pour objet l'avancement et la propagation des études de mathématiques pures et appliquées. Elle y concourt par ses travaux et par la publication des mémoires de ses membres.

Art. 3. — La Société se compose de membres résidents et de membres non résidents.

Les Français et les étrangers peuvent également en faire partie.

Art. 4. — Les conditions à remplir pour devenir membre de la Société sont les suivantes : 1° d'être présenté par deux membres qui auront adressé une demande signée; 2° d'obtenir à la séance suivante les suffrages de la majorité des membres présents.

Art. 5. — Le nombre des membres résidents et non résidents est illimité.

Voici maintenant un extrait du Règlement administratif :

Les conditions à remplir pour devenir membre de la Société sont :

1° D'être présenté par deux membres qui auront adressé une demande signée;

2° D'obtenir, à la séance suivante, les suffrages de la majorité des membres présents (art. 4 des Statuts).

Le diplôme délivré est signé par le président, l'un des secrétaires et le trésorier, et porte le sceau de la Société.

Le trésorier remet le diplôme après l'acquittement du droit d'admission, montant à 10 francs, et de la cotisation annuelle.

La Société se réunit deux fois par mois; elle prend trois mois de vacances : août, septembre et octobre.

Les procès-verbaux des séances sont rédigés dans l'intervalle d'une séance à l'autre.

Les communications faites par les membres de la Société ont lieu dans l'ordre de leur inscription; les communications des personnes étrangères à la Société ont lieu après celles des membres, sauf les cas d'urgence qui seront appréciés par le bureau.

Les membres qui auront fait des communications verbales ou pris part aux discussions devront remettre des notes au secrétaire pour la rédaction du procès-verbal.

La Société, préoccupée des avantages qu'elle peut offrir à tous ses membres, a décidé que le recueil intitulé *Bulletin de la Société mathématique*, qui rend compte des mémoires présentés à la Société, sera distribué gratuitement à tous les membres résidents ou non résidents.

La Société, voulant concourir aux progrès des mathématiques par tous les moyens compatibles avec son mode d'organisation, avisera aux moyens de publier successivement, et d'une manière aussi complète qu'il sera possible ou utile de le faire, les œuvres des anciens mathématiciens français ou étrangers.

La Société se réserve la faculté de publier les mémoires originaux trop étendus pour paraître dans le *Bulletin*.

Les publications émanant de la Société sont délivrées gratuitement à tous les membres de la Société résidents ou non résidents.

La Société forme une bibliothèque et échange ses pu-

blications contre les journaux de mathématiques pures et appliquées publiés en France et à l'étranger.

Les versements des membres résidents et non résidents se composent :

1° Du droit d'admission, montant à 10 francs;

2° De la cotisation annuelle.

Pour les membres résidents, cette cotisation annuelle s'élève à 36 francs, payables d'avance; elle se compose de deux parties : l'une fixe, s'élevant à 16 francs; l'autre éventuelle, payable en jetons de présence, en totalité ou en partie.

Cette disposition est applicable aux membres résidents seulement.

Les membres résidents auront droit, à chaque séance, à un jeton de présence.

Les nouveaux membres devront payer la totalité de la cotisation fixe, quelle que soit l'époque de leur admission et ce qui reste à courir de la cotisation éventuelle.

Pour les membres non résidents, la cotisation annuelle est de 20 francs, payables d'avance.

Les membres non résidents n'ont pas droit aux jetons de présence.

Les publications ne seront adressées qu'après le versement de la cotisation annuelle.

La cotisation annuelle peut, au choix de chaque membre, être remplacée par une somme de 300 francs, une fois payée.

Ce versement confère le titre de *sociétaire perpétuel.*

Les personnes qui désirent faire partie de la Société peuvent adresser leur adhésion aux Rédacteurs, qui se chargent de la transmettre à qui de droit.

THÉORIE DES INDICES PAR RAPPORT A UNE COURBE ET UNE SURFACE DU SECOND DEGRÉ;

(suite, voir même tome, p. 261);

PAR M. FAURE,
Chef d'escadrons d'Artillerie.

Indice d'un plan par rapport à une surface du second degré.

V. Définition. — *L'indice d'un plan par rapport à une surface du second degré est égal à l'indice du point où le plan est rencontré par le diamètre conjugué à sa direction, divisé par le produit des carrés des demi-axes de la section diamétrale parallèle au plan.*

Les théorèmes suivants peuvent aussi servir de définition à l'indice d'un plan.

1° L'indice d'un plan est égal au produit des distances de ce plan aux plans tangents parallèles au plan donné, divisé par le carré du produit des demi-axes de la surface;

2° L'indice d'un plan est égal au produit des distances du pôle de ce plan et du centre de la surface au plan, divisé par le produit des carrés des demi-axes de la surface;

3° Si l'on trace dans le plan donné une droite arbitraire, l'indice de ce plan, pris en signe contraire, sera égal au produit des sinus des angles formés par le plan donné avec les plans tangents menés à la surface par la droite arbitraire, divisé par le produit des sinus des angles formés par les plans tangents avec le plan diamétral qui

passe par cette droite et par le carré des demi-axes de la section déterminée par le plan diamétral;

4° L'indice d'un plan est égal au carré de la distance du centre de la surface à ce plan, divisé par le produit des carrés des demi-axes de la surface, diminué de l'inverse du produit des carrés des demi-axes de la section diamétrale parallèle au plan;

5° L'indice d'un plan, pris en signe contraire, est égal au produit des demi-axes de la section déterminée par ce plan, divisé par le cube du produit des demi-axes de la section diamétrale parallèle au plan;

6° L'indice d'un plan, pris en signe contraire, est égal à l'inverse du produit que l'on obtient en multipliant le produit des demi-axes de la section diamétrale parallèle au plan par le produit des demi-axes de la conique déterminée par ce plan diamétral dans le cône circonscrit à la surface suivant son intersection avec le plan donné;

7° On mène à la surface un plan tangent en un quelconque de ses points d'intersection avec le plan donné; l'indice de ce plan, pris en signe contraire, sera égal au carré du sinus de l'angle de ces plans, divisé par le carré de la distance du centre de la surface au plan tangent et par le carré du demi-diamètre parallèle à l'intersection des deux plans.

Nota. — L'indice d'un plan tangent à la surface est nul, et l'indice d'un plan qui passe par le centre de la surface est égal et de signe contraire à l'inverse du carré du produit des demi-axes de la section déterminée par ce plan.

VI. *Notations.* — Nous indiquerons les points par des lettres romaines minuscules, les plans par des lettres romaines majuscules, et les droites par des lettres grecques. Les indices étant désignés par l'initiale I, nous écrirons

I_a, I_α, I_A pour indiquer l'indice du point a, de la droite α et du plan A.

VII. Lemme. — *Quatre points a, b, c, d sont donnés sur une droite; on prend sur cette droite le point a' conjugué harmonique du point a par rapport aux points c et d, le point b' conjugué harmonique du point b par rapport aux mêmes points c et d. Si l'on désigne par* A *le rapport anharmonique* (a, b, c, d), *et par* A' *le rapport anharmonique* (a, b, b', a'), *on a la relation.*

$$(1 + A)^2 = 4AA'.$$

En effet, les points a, a', c, d étant en position harmonique, on a (*Géométrie supérieure*, 63), b étant un point arbitraire,

$$2\frac{ba'}{aa'} = \frac{bc}{ac} + \frac{bd}{ad};$$

les points b, b', c, d donnent de même la relation

$$2\frac{ab'}{bb'} = \frac{ac}{bc} + \frac{ad}{bd},$$

dans laquelle a est un point arbitraire.

Si l'on multiplie ces deux égalités membre à membre, on obtient celle du lemme.

On remarquera que l'on peut remplacer, dans cette égalité, le rapport A par son inverse; on voit également que notre lemme s'applique au cas où les points c et d seraient imaginaires, puisque le rapport de $(1 + A)^2$ à A peut s'exprimer au moyen des éléments qui déterminent les points donnés, c'est-à-dire la somme et le produit de leurs distances à une origine fixe. Les points a et b pourraient aussi être imaginaires.

Remarque. — Si l'on conçoit une conique passant par

les points c et d (réels ou imaginaires), et que l'on prenne les polaires des points a et b par rapport à cette conique, ces polaires passeront par les points a' et b', de sorte que le rapport A′ sera égal au rapport des distances du point a aux polaires des points b et a divisé par le rapport des distances du point b à ces mêmes polaires.

De même, si l'on conçoit une surface du second degré passant par les points c et d, et que l'on prenne les plans polaires des points a et b par rapport à cette surface, le rapport anharmonique A′ sera égal au rapport des distances du point a aux plans polaires des points b et a divisé par le rapport des distances du point b à ces mêmes plans polaires.

Relations entre les indices des points et des droites par rapport à une conique.

VIII. Puisqu'une droite se détermine par deux de ses points, l'indice d'une droite doit pouvoir s'obtenir à l'aide des indices de deux de ses points; de même, puisqu'un point se détermine par l'intersection de deux droites, l'indice d'un point doit pouvoir s'obtenir à l'aide des indices de deux droites passant par ce point.

Nous allons établir ces relations.

Première relation. — Indice d'une droite déterminée par deux points.

On donne deux points m, n sur une droite λ rencontrant une conique aux points a et b (réels ou imaginaires); si l'on désigne par $\mathfrak{L}$ le rapport anharmonique (m, n, a, b), on aura la relation

$$\frac{(1-\mathfrak{L})^2}{4\mathfrak{L}} = -\,\overline{mn}^2\,\frac{I_\lambda}{I_m I_n}.$$

En effet, le rapport anharmonique $\mathcal{L}$ donne d'abord

$$\frac{(1-\mathcal{L})^2}{\mathcal{L}} = \frac{(ma.nb - mb.na)^2}{ma.mb.na.nb},$$

ou, à cause de l'identité,

$$ma.bn + mb.na + mn.ab = 0,$$

$$\frac{(1-\mathcal{L})^2}{\mathcal{L}} = \frac{mn^2.ab^2}{ma.mb.na.nb}.$$

Or, d'après nos définitions, D étant le demi-diamètre de la conique parallèle à la droite mn, on a

$$\mathrm{I}_m = \frac{ma.mb}{\mathrm{D}^2},\quad \mathrm{I}_n = \frac{na.nb}{\mathrm{D}^2},\quad \mathrm{I}_\lambda = -\frac{ab^2}{4\mathrm{D}^4},$$

d'où résulte la relation que nous voulions démontrer.

On peut donner au théorème une forme différente, en ajoutant l'unité aux deux membres de l'égalité démontrée. Son premier membre $\frac{(1+\mathcal{L})^2}{4\mathcal{L}}$, d'après le lemme, devient un rapport anharmonique, et, d'après la remarque de ce lemme, ce rapport a pour valeur

$$\frac{(m,\nu)}{(m,\mu)} : \frac{(n,\nu)}{(n,\mu)},$$

les droites μ et ν étant les polaires des points m et n.

Mais, d'après un théorème connu, lorsque l'on a deux droites et leurs pôles par rapport à une conique, les distances de chacune de ces droites au pôle de l'autre sont entre elles comme les distances de ces mêmes droites au centre o de la conique. On a donc

$$\frac{(m,\nu)}{(n,\mu)} = \frac{(o,\nu)}{(o,\mu)},$$

et par conséquent

$$\frac{(1+\mathcal{L})^2}{4\mathcal{L}}=\frac{I_m I_n - mn^2 I_\lambda}{I_m I_n}=\frac{(n,\mu)^2(o,\nu)}{(m,\mu)(n,\nu)(o,\mu)}.$$

Or, d'après la définition (1°) de l'indice du point,

$$I_m=-\frac{(m,\mu)}{(o,\mu)},\quad I_n=-\frac{(n,\nu)}{(o,\nu)};$$

remplaçant au dénominateur de l'expression précédente I_m et I_n par ces valeurs, on obtient ce théorème :

Le produit des indices de deux points, diminué de l'indice de la droite qui les joint, multiplié par le carré de leur distance, est égal au carré de la distance de l'un des points à la polaire de l'autre divisé par le carré de la distance du centre de la conique à cette polaire

$$I_m I_n - mn^2 I_\lambda=\frac{(n,\mu)^2}{(o,\mu)^2}=\frac{(m,\nu)^2}{(o,\nu)^2}.$$

Deuxième relation. — Indice d'un point déterminé par deux droites.

On donne deux droites μ et ν se coupant au point l; si l'on mène de ce point les tangentes α et β à une conique, et que l'on désigne par $\mathcal{L}$ le rapport anharmonique du faisceau $(\mu, \nu, \alpha, \beta)$, on aura la relation

$$\frac{(1-\mathcal{L})^2}{4\mathcal{L}}=\frac{\sin^2(\mu,\nu)}{\Sigma^2}\,\frac{I_l}{I_\mu I_\nu},$$

dans laquelle Σ indique le produit des demi-axes de la conique.

La démonstration de ce théorème se fera d'une manière analogue à la précédente; après avoir exprimé la valeur de la fonction anharmonique du premier membre, au moyen des sinus des angles que forment entre elles les droites données et les tangentes, on fera usage de la défi-

nition (4°) de l'indice d'une droite et de la définition (8°) de l'indice du point.

Si l'on ajoute l'unité aux deux membres de l'égalité précédente, on arrive facilement à cet autre théorème :

Étant données deux droites μ *et* ν *se coupant au point* l *et les pôles* m *et* n *de ces droites par rapport à une conique qui a pour centre le point* o, *on a la relation*

$$\Sigma^2 I_\mu I_\nu + \sin^2(\mu, \nu) I_l = \frac{(m, \nu)^2 (o, \mu)^2}{\Sigma^2} = \frac{(n, \mu)^2 (o, \nu)^2}{\Sigma^2},$$

dans laquelle Σ *désigne le produit des demi-axes principaux de la conique.*

Nous indiquerons une troisième relation, celle qui a lieu entre les indices d'un point et d'une droite quelconques.

Troisième relation. — *Étant donnés un point* m *et une droite* λ, *si l'on joint le point* m *au pôle* l *de la droite* λ *par rapport à une conique et que l'on désigne par* R *le rapport anharmonique déterminé par les points* m, l *et les traces de la droite* lm *sur la conique, on aura la relation*

$$\frac{(1 + R)^2}{4R} = -\frac{(m, \lambda)^2}{\Sigma^2 I_m I_\lambda}.$$

En effet, d'après la remarque du lemme, μ étant la polaire du point m,

$$\frac{(1 + R)^2}{4R} = \frac{(m, \lambda)}{(m, \mu)} : \frac{(l, \lambda)}{(l, \mu)},$$

mais, le point o étant le centre de la conique, on a

$$I_m = -\frac{(m, \mu)}{(o, \mu)}, \quad I_\lambda = \frac{(l, \lambda)(o, \lambda)}{\Sigma^2}, \quad \frac{(m, \lambda)}{(l, \mu)} = \frac{(o, \lambda)}{(o, \mu)},$$

d'où résulte la relation indiquée.

Lorsque la droite λ est la polaire du point m, on a

$$R = 1;$$

par conséquent, le produit des indices d'une droite et de son pôle, changé de signe, est égal au carré de la distance du pôle à la droite, divisé par le carré du produit des demi-axes de la conique.

Relations entre les indices des points, des droites et des plans, par rapport à une surface du second degré.

IX. Première relation. — Indice d'une droite déterminée par deux points.

On donne deux points m et n sur une droite λ, rencontrant une surface du second degré aux points a et b; si l'on désigne par $\mathfrak{L}$ le rapport anharmonique (m, n, a, b), on aura la relation

$$\frac{(1-\mathfrak{L})^2}{4\mathfrak{L}} = -mn^2 \frac{I_\lambda}{I_m I_n}.$$

Cette relation peut se démontrer comme son analogue dans le plan, en suivant une marche identique; on peut la déduire aussi de celle-ci en y remplaçant les indices pris par rapport à une conique par les indices pris par rapport à la surface, d'après les deux principes cités (III et IV).

On peut donner au théorème cet autre énoncé, en ajoutant l'unité aux deux membres de l'égalité :

Étant donnés deux points m et n sur une droite λ, ainsi que les plans polaires M, N *de ces points, par rapport à une surface du second degré qui a pour centre le point o, on a*

$$I_m I_n - mn^2 I_\lambda = \frac{(n, M)^2}{(o, M)^2} = \frac{(m, N)^2}{(o, N)^2}.$$

Deuxième relation. — Indice d'un point ou d'un plan déterminé par deux droites.

Étant données une surface du second degré et deux droites μ *et* ν *se coupant au point* l, *si l'on mène par ce point les tangentes* α *et* β *à la section de la surface par le plan* P, *déterminé par les droites données, et que l'on désigne par* $\mathcal{L}$ *le rapport anharmonique du faisceau* $(\mu, \nu, \alpha, \beta)$, *on aura la relation*

$$\frac{(1-\mathcal{L})^2}{4\mathcal{L}} = -\sin^2(\mu, \nu)\frac{I_l I_P}{I_\mu I_\nu}.$$

Cette relation peut se démontrer directement, mais il est plus simple de la déduire de la deuxième relation relative aux coniques, en y faisant la substitution d'indices indiquée ci-dessus. On aura égard à la définition 5° de l'indice d'un plan.

En ajoutant l'unité aux deux membres de l'égalité, on obtient cet autre théorème :

Étant données une surface du second degré et deux droites μ, ν *se coupant au point* l, *si l'on désigne par* m *le pôle de l'une des droites* μ, *par rapport à la conique déterminée par le plan* P *des droites données, par* o *le centre de cette conique, et par* σ *le produit de ses demi-axes principaux, on a la relation*

$$I_\mu I_\nu - \sin^2(\mu, \nu)\, I_l I_P = \frac{(m, \nu)^2 (o, \mu)^2}{\sigma^4}.$$

Troisième relation. — Indice d'un plan déterminé par une droite et un point.

Étant donnés une surface du second degré, un point l *et une droite* λ, *si l'on joint le point* l *au pôle* f *de la droite* λ *par rapport à la section déterminée par le plan* P *qui passe par le point* l *et la droite* λ, *et que l'on*

désigne par R *le rapport anharmonique formé avec les points* l, f *et les traces de la droite* lf *sur la surface, on a*

$$\frac{(1+R)^2}{4R} = \frac{(l, \lambda)^2 I_P}{I_l I_\lambda}.$$

Cette relation se déduit immédiatement de la troisième relation relative aux coniques, en y faisant la substitution d'indices déjà indiquée, et en ayant égard à la définition 5° de l'indice du plan.

QUATRIÈME RELATION. — Indice d'un plan déterminé par trois points.

Étant donnés trois points l, m, n *déterminant un plan* P *et une surface du second degré, on désigne par* $\mathcal{L}$ *le rapport anharmonique déterminé par les points* m, n *et les traces de la droite* mn *sur la surface, par* R *le rapport anharmonique déterminé par le point* l, *le pôle de la droite* mn *(par rapport à la section de la surface par le plan* P*) et les traces sur la surface de la droite menée de ce pôle au point* l. *On a alors la relation*

$$\frac{(1-\mathcal{L})^2}{4\mathcal{L}} \frac{(1+R)^2}{4R} = -\frac{4\, lmn^2 I_P}{I_l I_m I_n},$$

dans laquelle lmn *désigne la surface du triangle déterminé par les points donnés.*

Cette relation s'obtient en multipliant membre à membre la première relation par la troisième.

CINQUIÈME RELATION. — Indice d'une droite déterminée par deux plans.

Étant donnés une surface du second degré et deux plans M *et* N *se coupant suivant la droite* λ, *si l'on mène par cette droite les plans tangents* A, B *à la surface, et que l'on désigne par* $\mathcal{L}$ *le rapport anharmonique du*

faisceau de plans (M, N, A, B), *on aura la relation*

$$\frac{(1-\mathcal{L})^2}{4\mathcal{L}} = \frac{\sin^2(M, N)}{\Sigma^2}\frac{I_\lambda}{I_M I_N},$$

dans laquelle Σ *indique le produit des demi-axes principaux de la surface.*

Pour démontrer ce théorème, on peut suivre une marche analogue à celle que nous avons indiquée pour démontrer la première relation relative aux coniques. Ecrivant la valeur de la fonction anharmonique du premier membre, et ayant égard à l'identité connue qui existe entre les sinus des angles formés par quatre plans, on trouve

$$\frac{(1-\mathcal{L})^2}{\mathcal{L}} = \frac{\sin^2(M, N)\sin^2(A, B)}{\sin(M, A)\sin(M, B)\sin(N, A)\sin(N, B)}.$$

Or d'après la définition 3° de l'indice d'un plan, D étant le produit des demi-axes de la section diamétrale qui passe par l'intersection λ des plans M et N,

$$I_M = -\frac{\sin(M, A)\sin(M, B)}{D^2\sin(D, A)\sin(D, B)},\quad I_N = -\frac{\sin(N, A)\sin(N, B)}{D^2\sin(D, A)\sin(D, B)},$$

et, d'après la définition 4° de l'indice d'une droite,

$$I_\lambda = \frac{\Sigma^2\sin^2(A, B)}{4D^4\sin^2(D, A)\sin^2(D, B)};$$

de là résulte la relation indiquée.

Si l'on ajoute l'unité aux deux membres de cette relation, on arrive à ce théorème :

Étant donnés deux plans M, N *et les pôles m, n de ces plans, par rapport à une surface du second degré qui a pour centre le point o, on a la relation*

$$\Sigma^2 I_M I_N + \sin^2(M, N) I_\lambda = \frac{(m, N)^2(o, M)^2}{\Sigma^2} = \frac{(n, M)^2(o, N)^2}{\Sigma^2}.$$

Sixième relation. — Indice d'un point déterminé par une droite et un plan.

Étant donnés un plan L *et une droite* λ, *se coupant au point p, et une surface du second degré, si l'on désigne par* F *le plan qui passe par le point p et la polaire de la droite donnée, par* R *le rapport anharmonique formé par les plans* L, F *et les plans tangents à la surface menés par l'intersection des deux premiers, on a*

$$\frac{(1+R)^2}{4R} = -\frac{\sin^2(\lambda, L)\,I_p}{\Sigma^2 I_\lambda I_L}.$$

Désignons par l et f les pôles des plans L et F, et menons la droite lf. Cette droite rencontre le plan F en un point conjugué au point f, et le plan L en un point conjugué au point l. Mais le pôle f se trouve au point d'intersection de la droite λ avec le plan polaire du point p; ainsi les points p et f sont conjugués à la surface. Il résulte de là que le premier membre de l'égalité ci-dessus (voir le lemme) est égal au rapport anharmonique formé avec les points l, f et les traces de la droite lf sur la surface, ou, ce qui revient au même,

$$\frac{(1+R)^2}{4R} = \frac{(l, F)}{(l, L)} : \frac{(f, F)}{(f, L)}.$$

Or, le point o étant le centre de la surface,

$$\frac{(l, F)}{(f, L)} = \frac{(o, F)}{(o, L)}:$$

d'où résulte, par l'élimination de la distance (l, F),

$$\frac{(1+R)^2}{4R} = \frac{(o, F)(f, L)^2}{(o, L)(l, L)(f, F)};$$

Or

$$(f, L) = fp \sin(\lambda, L),$$

et, par définition,

$$I_L = \frac{(l, L)(o, L)}{\Sigma^2}, \quad I_f = -\frac{(f, F)}{(o, F)}.$$

Comme d'ailleurs les points f et p sont conjugués, notre première relation donne

$$I_f I_p = fp^2 I_\lambda.$$

De ces valeurs résulte l'égalité à démontrer.

Septième relation. — Indice d'un point déterminé par trois plans.

Étant donnés trois plans L, M, N, *se coupant au point p, et une surface du second degré; par la droite λ, intersection des plans* M *et* N, *on mène les plans tangents à la surface, et l'on désigne par* $\mathfrak{L}$ *le rapport anharmonique déterminé par les plans* M, N *et ces deux plans tangents. Par le point p et la polaire de la droite λ on fait passer un plan* F, *et l'on désigne par* R *le rapport anharmonique déterminé par les plans* L, F *et les plans tangents à la surface menés par l'intersection de ces plans; on a alors la relation*

$$\frac{(1-\mathfrak{L})^2}{4\mathfrak{L}} \frac{(1+R)^2}{4R} = -\frac{\sin^2 LMN\, I_p}{\Sigma^4 I_L I_M I_N}.$$

Ce théorème se démontre en multipliant membre à membre la cinquième et la sixième de nos relations, et remarquant que le volume V d'un tétraèdre formé par les plans L, M, N et un quatrième plan quelconque est donné par la relation

$$(3V)^2 = 2LMN \sin(M, N)\sin(\lambda, L) = 2LMN \sin LMN,$$

L, M, N désignant les aires des faces (*).

(*) Le sinus de l'angle solide LMN est aussi égal au facteur par lequel il faut multiplier le produit des trois arêtes issues du point p pour obtenir six fois le volume du tétraèdre.

Huitième relation. — Relation entre les indices d'un point et d'un plan.

Étant donnés un point l, *un plan* M *et une surface du second degré, on désigne par* R *le rapport anharmonique déterminé par le point* l, *le pôle* m *du plan et les traces de la droite* lm *sur la surface,*

$$\frac{(1+R)^2}{4R} = -\frac{(l, M)^2}{\Sigma^2 I_l I_M}.$$

Le lemme donne, en effet, L étant le plan polaire du point l,

$$\frac{(1+R)^2}{4R} = \frac{(l, M)}{(l, L)} : \frac{(m, M)}{(m, L)};$$

or, o étant le centre de la surface,

$$I_l = -\frac{(l, L)}{(o, L)}, \quad I_M = \frac{(m, M)(o, M)}{\Sigma^2}, \quad \frac{(l, M)}{(m, L)} = \frac{(o, M)}{(o, L)};$$

de là résulte la relation indiquée.

Il est facile de trouver d'autres relations entre les indices, par exemple, en combinant de diverses manières celles que nous venons d'obtenir. C'est ce que nous allons faire dans le paragraphe suivant pour des cas particuliers.

Propriétés d'un système de deux, trois ou quatre points, droites et plans conjugués à une surface du second ordre.

X. Les relations établies précédemment donnent, comme cas particuliers, les suivantes, dans le même ordre.

Première proposition. — Le produit des indices de

deux points conjugués est égal à l'indice de la droite qui joint ces points, multiplié par le carré de leur distance.

Deuxième proposition. — Le produit des indices de deux droites conjuguées est égal à l'indice du plan qu'elles déterminent, multiplié par l'indice de leur point d'intersection et par le carré du sinus de leur angle.

Troisième proposition. — Le produit des indices d'un point et d'une droite conjugués est égal à l'indice du plan déterminé par le point et la droite, multiplié par le carré de la distance du point à la droite.

Quatrième proposition. — Le produit des indices des sommets d'un triangle conjugué est égal à l'indice du plan du triangle, multiplié par le carré du double de sa surface.

Cinquième proposition. — Le produit des indices de deux plans conjugués, pris en signe contraire, est égal à l'indice de leur droite d'intersection, multiplié par le carré du sinus de leur angle et divisé par le produit des carrés des demi-axes de la surface.

Sixième proposition. — Le produit des indices d'une droite et d'un plan conjugués, pris en signe contraire, est égal à l'indice de leur point d'intersection, multiplié par le carré du sinus de leur angle et divisé par le produit des carrés des demi-axes de la surface.

Septième proposition. — Le produit des indices des faces d'un trièdre conjugué est égal à l'indice de son sommet, multiplié par le carré du sinus de l'angle solide formé par ces trois faces, divisé par la quatrième puissance du produit des demi-axes de la surface.

Huitième proposition. — Le produit des indices d'un plan et de son pôle est égal et de signe contraire au carré de la distance du pôle au plan, divisé par le produit des carrés des demi-axes de sa surface.

Neuvième proposition. — Le produit des indices des

côtés d'un triangle conjugué est égal au carré de l'indice du plan du triangle, multiplié par le carré du rapport que l'on obtient en divisant le produit des hauteurs du triangle par le double de sa surface.

Ce théorème se déduit de la proposition quatrième, dans laquelle on élimine les indices des sommets à l'aide de la proposition troisième.

Dixième proposition. — Le produit, pris en signe contraire, des indices des arêtes d'un trièdre conjugué, est égal au carré du sinus de l'angle solide trièdre, divisé par le carré du produit des demi-axes de la surface.

Pour démontrer ce théorème, on se sert de la proposition deuxième, on multiplie les deux membres de l'égalité par l'indice de la troisième arête, et l'on a égard à la proposition sixième.

Onzième proposition. — Le produit, pris en signe contraire, des indices des sommets d'un tétraèdre conjugué est égal au carré du sextuple de son volume, divisé par le produit des carrés des demi-axes de la surface.

On se sert de la proposition quatrième, on multiplie les deux membres de l'égalité par l'indice du quatrième sommet, et l'on a égard à la proposition huitième.

Douzième proposition. — Le produit, pris en signe contraire, des indices des faces d'un tétraèdre conjugué, est égal au carré du produit des hauteurs du tétraèdre, divisé par la sixième puissance du produit des demi-axes de la surface et par le carré du sextuple du volume du tétraèdre.

Cette proposition se déduit de la précédente, dans laquelle on élimine les indices des sommets au moyen de la huitième proposition.

Treizième proposition. — Le produit des indices de deux droites polaires réciproques par rapport à une surface du second degré est égal et de signe contraire au

carré du sinus de leur angle, multiplié par le carré de leur plus courte distance et divisé par le carré du produit des demi-axes de la surface.

En effet, l et m étant deux points de la première droite, n et p deux points de la seconde, choisis de façon que le tétraèdre $lmnp$ soit conjugué à la surface, la première proposition donne le produit des indices des points l et m et le produit des indices des points n et p. Si l'on multiplie entre eux ces deux produits, en ayant égard à la onzième proposition et à l'expression du volume d'un tétraèdre en fonction des arêtes opposées et de leur plus courte distance, on obtient le théorème que l'on voulait établir.

Considérons un tétraèdre $lmnp$ conjugué à une surface du second ordre dont le centre est au point o. L'indice du point p, à cause de la définition 1°, est égal et de signe contraire au rapport du volume $lmnp$ au volume $olmn$; les indices des points l, m, n s'expriment d'une manière analogue, et, comme le volume du tétraèdre donné est la somme algébrique des quatre tétraèdres qui ont pour sommet le centre o et pour bases les faces du tétraèdre $lmnp$, on voit que :

Quatorzième proposition. — La somme des valeurs inverses des indices des sommets d'un tétraèdre conjugué est égale à -1.

Laissant fixe le sommet p du tétraèdre, le triangle conjugué lmn pourra occuper une infinité de positions dans son plan P (plan polaire du point p), d'où il suit que, si l'on considère dans un plan P la série des triangles lmn conjugués à la surface, on aura

$$\frac{1}{I_l}+\frac{1}{I_m}+\frac{1}{I_n}=-1-\frac{1}{I_p}=\text{const.}$$

Pour trouver la valeur de la constante, nous suppose-

rons que le triangle conjugué a pour l'un de ses sommets le centre de la section déterminée par le plan P; les deux autres étant à l'infini, il en résulte que :

Quinzième proposition. — La somme des inverses des indices des sommets d'un triangle conjugué est égale à l'inverse de l'indice du centre de la section déterminée dans la surface par le plan du triangle.

Si le plan du triangle passe par le centre de la surface, la somme dont il s'agit est égale à — 1. Considérons donc un triangle *lmn* conjugué à la surface et situé dans un plan diamétral. Laissant fixe le sommet *n* du triangle, les couples de points *l* et *m* pourront occuper une infinité de positions sur la droite *lm*, et l'on aura

$$\frac{1}{I_l} + \frac{1}{I_m} = -1 - \frac{1}{I_n} = \text{const.}$$

On déterminera la constante en supposant que l'un des points conjugués est le milieu de la corde déterminée dans la surface; donc :

Seizième proposition. — La somme des inverses des indices de deux points conjugués est égale à l'inverse de l'indice du point milieu de la corde déterminée dans la surface par la droite qui joint les deux points.

Pour compléter cette série de propriétés, nous donnons sans démonstration les propositions suivantes. Nous montrerons, dans un autre article, que tous ces théorèmes sont des cas particuliers de quelques énoncés très-généraux.

Dix-septième proposition. — Si, par un point fixe d'un plan donné, on mène dans ce plan des couples de droites conjuguées, la somme des inverses des indices de ces droites est constante.

Dix-huitième proposition. — Lorsqu'un triangle est conjugué, la somme des inverses des indices des côtés de

ce triangle est égale à la somme des carrés des inverses des demi-axes de la section diamétrale de la surface parallèle au plan du triangle, divisée par l'indice de ce plan.

Dix-neuvième proposition. — Lorsqu'un trièdre est conjugué, la somme des inverses des indices de ses arêtes est égale au carré de la distance de son sommet au centre de la surface, diminué de la somme des carrés des demi-axes de cette surface, la différence étant divisée par l'indice du sommet du trièdre, pris en signe contraire.

Vingtième proposition. — Lorsqu'un tétraèdre est conjugué, la somme des inverses des indices de ses six arêtes est égale à la somme des carrés des demi-axes de la surface, prise en signe contraire.

Vingt et unième proposition. — Si, par une droite fixe, on mène deux plans conjugués, la somme des inverses des indices de ces plans est constante.

Vingt-deuxième proposition. — Si, par un point fixe, on mène trois plans conjugués, la somme des inverses des indices de ces plans est constante.

Vingt-troisième proposition. — La somme des inverses des indices des faces d'un tétraèdre conjugué est égale et de signe contraire à la somme des carrés des rectangles construits sur les demi-axes de la surface.

Vingt-quatrième proposition. — La somme des indices de deux, de trois ou quatre points conjugués est égale à l'indice du point de moyenne distance de ces points, multiplié par le carré du nombre des points.

Vingt-cinquième proposition. — Si, par un point fixe d'un plan donné, on mène dans ce plan des couples de droites conjuguées, la somme des indices de ces droites, divisée par le carré du sinus de leur angle, est constante.

Vingt-sixième proposition. — Si, par un point fixe, on mène trois droites conjuguées, la somme que l'on obtient en divisant l'indice de chaque droite par le carré

du sinus de l'angle que forme cette droite avec le plan des deux autres est constante et égale à la somme des indices de trois droites rectangulaires passant par le point fixe.

Vingt-septième proposition. — Si, par une droite fixe, on mène deux plans conjugués, la somme des indices de ces plans, divisée par le carré du sinus de leur angle, est constante.

Vingt-huitième proposition. — Si, par un point fixe, on mène trois plans conjugués, la somme que l'on obtient en divisant l'indice de chaque plan par le carré du sinus de l'angle que fait ce plan avec l'intersection des deux autres est constante et égale à la somme des indices de trois plans rectangulaires passant par le point fixe.

SÉPARATION DES RACINES DES ÉQUATIONS A UNE INCONNUE;

PAR M. MALEYX.

I. THÉORÈME. *Soient :* $F(x) = 0$ *une équation à une inconnue, dont le premier membre est une fonction continue de la variable, et dont la dérivée* $F'(x)$ *est aussi continue;* $\varphi(x)$ *une fonction quelconque de la même variable qui reste finie et continue pour toute valeur finie de la variable;* $f(x)$ *une troisième fonction arbitraire de la même variable qui ne puisse changer de signe qu'en passant par zéro ou par l'infini, et qui ne puisse le faire pour une valeur de x satisfaisant à l'équation* $F(x) = 0$*; les racines de l'équation* $F(x) = 0$ *sont séparées par les racines réelles de l'équation*

$$(1) \qquad \varphi(x)F(x) - f(x)F'(x) = 0,$$

jointes aux nombres qui peuvent rendre $f(x)$ *nulle ou*

infinie, tous ces nombres ayant été rangés par ordre de grandeur.

Pour démontrer ce théorème, il suffit de faire voir que si α, β sont deux racines réelles consécutives de l'équation $F(x) = 0$, ne comprenant aucune valeur de x pour laquelle $f(x)$ change de signe, il existe entre elles au moins une racine réelle de l'équation (1).

Or, d'après les hypothèses précédentes, $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ sont deux nombres finis de mêmes signes, et il en est de même de $f(\alpha + h)$ et de $f(\beta - h)$, h étant positif et moindre que $\beta - \alpha$; de plus, l'équation (1) pouvant se mettre sous la forme

$$F(x)\left[\varphi(x) - f(x)\frac{F'(x)}{F(x)}\right] = 0,$$

si l'on substitue dans son premier membre les nombres $\alpha + h$, $\beta - h$, h étant positif et suffisamment petit, les deux substitutions feront prendre au quotient $\frac{F'(x)}{F(x)}$ des valeurs numériques aussi grandes qu'on le voudra, la première positive et la seconde négative. La première substitution fera donc prendre au premier membre de l'équation (1) le signe de $-f(\alpha + h)F(\alpha + h)$, et la seconde le signe contraire de $f(\beta - h)F(\beta - h)$, puisque $\varphi(x)$ reste finie; donc il existe au moins une racine de l'équation (1) entre α et β.

II. On déduit de là un moyen de séparer les racines des équations algébriques, que nous allons examiner successivement à partir du troisième degré. Divisons le premier membre de l'équation générale du troisième degré

$$x^3 + 3px^2 + 3qx + r = 0$$

par son polynôme dérivé, nous obtiendrons un quotient

et un reste, tous les deux du premier degré, et nous pourrons écrire l'égalité

$$(\alpha)\quad \begin{cases} x^3 + 3px^2 + 3qx + r - (x^2 + 2px + q)(x + p) \\ = 2(q - p^2)x + r - pq. \end{cases}$$

D'après le théorème précédent, les racines de l'équation

$$x^3 + 3px^2 + 3qx + r = 0$$

sont séparées par les deux racines commensurables des deux équations du premier degré

$$(\beta)\qquad x + p = 0,$$

$$(\gamma)\qquad 2(q - p^2)x + r - pq = 0.$$

On peut tirer de là la condition de réalité des racines de l'équation. Pour plus de commodité, décomposons le polynôme dérivé en somme de carrés, l'égalité (α) peut se mettre sous la forme

$$(\delta)\quad \begin{cases} x^3 + 3px^2 + 3qx + r = [(x + p)^2 - (p^2 - q)](x + p) \\ \qquad + 2(q - p^2)x + r - pq. \end{cases}$$

La substitution d'un nombre quelconque dans les deux membres de l'égalité (δ) donnant des résultats identiques, nous ferons nos substitutions dans le second membre.

Deux cas doivent être distingués, suivant que la racine de l'équation (γ) est plus grande ou plus petite que celle de l'équation (β).

Première hypothèse :

$$\frac{r - pq}{2(p^2 - q)} > -p.$$

Pour que les trois racines soient réelles, dans ce cas, il faut et il suffit que la substitution de $\frac{r - pq}{2(p^2 - q)}$ fasse

prendre au premier membre de l'équation le signe —, et que la substitution de $-p$ lui fasse prendre le signe $+$; les conditions de réalité sont donc

$$(1)\quad \left\{\left[\frac{r-pq}{2(p^2-q)}+p\right]^2-(p^2-q)\right\}\left[\frac{r-pq}{2(p^2-q)}+p\right]<0,$$

$$(2)\quad 2(p^2-q)p+r-pq>0.$$

Or, d'après l'hypothèse, il suffit que le premier facteur de l'inégalité (1) soit négatif, pour que les inégalités (1) et (2) soient satisfaites; car, s'il en est ainsi, le premier membre de l'inégalité (1), produit de deux nombres de signes contraires, est négatif, et comme, forcément, p^2-q est positif, l'inégalité (2) devient conséquence de l'hypothèse par des opérations permises. Donc la seule condition nécessaire et suffisante dans ce cas est

$$\left[\frac{r-pq}{2(p^2-q)}+p\right]^2-(p^2-q)<0.$$

Seconde hypothèse :

$$\frac{r-pq}{2(p^2-q)}<-p.$$

On verrait de même que, dans ce cas, les conditions de réalité sont

$$(3)\quad \left\{\left[\frac{r-pq}{2(p^2-q)}+p\right]^2-(p^2-q)\right\}\left[\frac{r-pq}{2(p^2-q)}+p\right]>0,$$

$$(4)\quad 2(p^2-q)p+r-pq<0.$$

En raisonnant comme on l'a fait dans la première hypothèse, on reconnaîtrait qu'il suffit encore, dans ce second cas, que le premier facteur de l'inégalité (3) soit négatif, pour que les inégalités (3) et (4) soient satisfaites.

Donc, dans tous les cas, la condition unique, nécessaire et suffisante pour que les trois racines de l'équation

$$x^3 + 3px^2 + 3qx + r = 0$$

soient réelles, est exprimée par l'inégalité

$$\left[\frac{r - pq}{2(p^2 - q)} + p\right]^2 - (p^2 - q) < 0,$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$(r - 3pq + 2p^3)^2 - 4(p^2 - q)^3 < 0.$$

III. Prenons, en deuxième lieu, l'équation complète du quatrième degré

$$x^4 + 4px^3 + 6qx^2 + 4rx + s = 0.$$

Divisons encore le premier membre par son polynôme dérivé, nous aurons un quotient du premier degré et un reste du second, et nous pourrons écrire l'égalité

$$\begin{aligned} x^4 + 4px^3 + 6qx^2 + 4rx + s = (x^3 + 3px^2 + 3qx + r)(x + p) \\ + 3(q - p^2)x^2 + 3(r - pq)x \\ + s - pr. \end{aligned}$$

L'application de notre théorème établit que les racines de l'équation du quatrième degré sont séparées par la racine commensurable de l'équation du premier degré

$$x + p = 0,$$

et par les deux racines de l'équation du second degré

$$3(q - p^2)x^2 + 3(r - pq)x + s - pr = 0,$$

supposées réelles.

La substitution de ces trois nombres, rangés par ordre de grandeur, dans le polynôme premier membre de l'équation du quatrième degré, conduit donc à la séparation des racines. On peut éviter la substitution des deux ra-

cines de l'équation du second degré, qui peuvent être incommensurables, au moyen d'une nouvelle division. Posons, pour abréger l'écriture,

$$3(q - p^2) = a,$$
$$3(r - pq) = b,$$
$$s - pr = c;$$

divisons le premier diviseur

$$x^3 + 3px^2 + 3qx + r$$

par le reste

$$ax^2 + bx + c,$$

nous obtiendrons un quotient du premier degré que nous représenterons par Q, et un reste du premier degré que nous représenterons aussi par $\alpha x + \beta$. D'après ces conventions, on a

$$x^3 + 3px^2 + 3qx + r = (ax^2 + bx + c)\,Q + \alpha x + \beta,$$

et l'égalité résultant de notre première division peut se mettre sous la forme

$$x^4 + 4px^3 + 6qx^2 + 4rx + s = (ax^2 + bx + c)[(x + p)Q + 1] + (x + p)(\alpha x + \beta).$$

Il nous suffit, pour effectuer la séparation, de connaître les signes pris par le second membre de la dernière égalité, quand on y remplace la variable x par l'une des racines de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

supposées réelles, ou par la racine de l'équation

$$x + p = 0.$$

La connaissance de ces signes est facilement acquise par celle de l'ordre de grandeur des racines des trois

équations

$$ax^2 + bx + c = 0,$$
$$x + p = 0,$$
$$\alpha x + \beta = 0;$$

et cet ordre de grandeur est déterminé, soit par la substitution, dans le premier membre de la première, des racines des deux dernières, soit par la comparaison de ces racines avec la demi-somme des racines de la première.

IV. Considérons, comme dernier exemple particulier, l'équation complète du cinquième degré représentée par

$$F(x) = 0.$$

Multiplions son premier membre par le binôme $x - \alpha$, dont nous laissons momentanément le second terme indéterminé, et divisons le produit, qui est du sixième degré, par la dérivée du polynôme $F(x)$ qui est du quatrième. Nous obtiendrons un quotient du second degré, et un reste du troisième. On doit remarquer que le coefficient indéterminé α, ne figurant qu'au premier degré dans les coefficients du dividende, et n'entrant pas dans ceux du diviseur, les coefficients du quotient et du reste ne peuvent le contenir qu'au premier degré ; on pourra donc en disposer de manière à rendre nul le coefficient du terme en x^3 dans le reste. Supposons qu'on ait déterminé α d'après cette condition, et représentons le quotient et le reste respectivement par

$$ax^2 + bx + c, \quad a'x^2 + b'x + c';$$

après avoir remplacé α par sa valeur, on aura l'égalité

$$(x - \alpha)F(x) = F'(x)(ax^2 + bx + c) + a'x^2 + b'x + c'.$$

D'après notre théorème, les racines de l'équation

$F(x) = 0$ seront séparées par les racines réelles des deux équations du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0,$$
$$a'x^2 + b'x + c' = 0.$$

Si, par une nouvelle division, on donne à $F'(x)$ la forme

$$F'(x) = (a'x^2 + b'x + c')Q + mx + n,$$

l'égalité résultant de la première division pourra s'écrire

$$(x - \alpha)F(x) = (a'x^2 + b'x + c')[(ax^2 + bx + c)Q + 1]$$
$$+ (mx + n)(ax^2 + bx + c).$$

Il suffira alors de connaître l'ordre de grandeur des racines réelles des équations

$$ax^2 + bx + c = 0,$$
$$a'x^2 + b'x + c' = 0,$$
$$mn + n = 0,$$
$$x - \alpha = 0,$$

pour pouvoir assigner le signe du second membre et celui du facteur $x - \alpha$ qui figure au premier membre, quand on substituera dans les deux membres l'une des racines des deux équations

$$ax^2 + bx + c = 0,$$
$$a'x^2 + b'x + c' = 0.$$

On en conclura le signe de $F(x)$ pour ces valeurs, et la séparation sera effectuée.

Remarque I. — On pourrait craindre que le coefficient de la variable auxiliaire α ne fût nul dans le terme du troisième degré qu'on veut détruire dans le reste, mais on vérifie facilement par le calcul que, s'il en est ainsi, en divisant simplement $F(x)$ par sa dérivée, sans introduire

au dividende le facteur $x - \alpha$, le reste se réduit au second degré.

Remarque II. — L'indétermination de la variable auxiliaire α permet de faire disparaître un terme quelconque du reste ; et si, par exemple, on trouvait plus convenable de réduire à zéro le terme indépendant du reste du troisième degré, on pourrait séparer les racines de l'équation $F(x) = 0$ au moyen de celles d'une équation du second degré, et de celles d'une équation du troisième degré admettant la racine zéro.

V. Nous allons maintenant établir qu'on peut, par le moyen de notre théorème, ramener la séparation des racines des équations dont le degré ne surpasse pas $2m + 1$ à celle des racines d'un système de quatre équations dont les degrés ne surpassent pas m, problème qui doit être considéré comme résolu.

Considérons d'abord l'équation de degré $2m$

$$F(x) = 0.$$

Divisons son premier membre par le polynôme dérivé $F'(x)$, nous aurons un quotient du premier degré que nous représenterons par $ax + b$, et un reste du degré $2m - 2$, représenté par $F_1(x)$. D'après cela on peut écrire l'égalité

$$F(x) = (ax + b) F'(x) + F_1(x).$$

Multiplions $F_1(x)$ par un polynôme du degré $m - 2$ à coefficients indéterminés

$$f(x) = x^{m-2} + px^{m-3} + \ldots + t.$$

Le produit $f(x) F_1(x)$ est du degré $3m - 4$; divisons-le par $F'(x)$ dont le degré est $2m - 1$, le quotient sera du degré $m - 3$, et le reste du degré $2m - 2$. Mais,

en disposant convenablement des $m - 2$ coefficients indéterminés de $f(x)$, qui ne figurent qu'au premier degré dans ceux du reste, on pourra faire disparaître les $m - 2$ premiers termes de ce reste, dont le degré sera ainsi réduit à m. Représentons par $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $F_2(x)$ ce que deviennent respectivement $f(x)$, le quotient, et le reste de notre division, quand nous y aurons remplacé les coefficients indéterminés de $f(x)$ par les valeurs que nous venons de définir; nous aurons les deux égalités

$$F(x) = (ax + b)F'(x) + F_1(x),$$
$$\varphi(x)F_1(x) = \psi(x)F'(x) + F_2(x).$$

Multiplions les deux membres de la première par $\varphi(x)$, et ajoutons-les membre à membre en posant

$$(ax + b)\varphi(x) + \psi(x) = F_3(x),$$

nous aurons

$$\varphi(x)F(x) = F_3(x)F'(x) + F_2(x).$$

Les racines de l'équation $F(x) = 0$ sont séparées par celles des deux équations

$$F_2(x) = 0,$$
$$F_3(x) = 0,$$

dont les degrés respectifs sont m et $m - 1$. Cette séparation sera effectuée quand nous connaîtrons les signes que prend $F(x)$ par la substitution à la place de x des racines des deux équations précédentes. Divisons maintenant $F'(x)$ par $F_2(x)$, désignons le quotient par Q et le reste du degré $m - 1$ par $F_4(x)$, nous en conclurons

$$F'(x) = F_2(x)Q + F_4(x),$$
$$\varphi(x)F(x) = F_2(x)[QF_3(x) + 1] + F_3(x)F_4(x).$$

D'après la dernière égalité, il suffit, pour connaître les signes que prend $F(x)$ quand on y substitue les racines des deux équations

$$F_2(x) = 0,$$
$$F_3(x) = 0,$$

de ranger par ordre de grandeur les racines des quatre équations

$$F_2(x) = 0,$$
$$F_3(x) = 0,$$
$$F_4(x) = 0,$$
$$\varphi(x) = 0;$$

ce qui peut toujours être fait, puisqu'on peut séparer les racines de ces équations et en approcher autant que l'on voudra.

En second lieu, si l'équation est du degré $2m + 1$, un raisonnement entièrement analogue conduit aux mêmes conclusions ; il n'y a de différence à noter que sur les degrés des polynômes remplaçant $\varphi(x)$ et $F_3(x)$, qui seront respectivement augmentés d'une unité et deviendront $m - 1$ et m.

Remarque I. — De même que dans l'article précédent, il se pourrait que quelques-uns ou même la totalité des coefficients de $f(x)$, dont on veut disposer pour réduire au degré m le reste de la division de $f(x)\,F_1(x)$ par $F'(x)$, prissent des valeurs infinies. Voyons ce qui se passerait dans ce cas. Observons d'abord que cette circonstance ne peut se présenter qu'en établissant entre les coefficients de $F_1(x)$ des relations particulières, et qu'elle ne peut avoir lieu tant que ces coefficients restent quelconques et indépendants les uns des autres. Considérons un polynôme quelconque du même degré que $F_1(x)$, soit $\chi(x)$; les coefficients de $\chi(x)$ étant abso-

lument arbitraires, on peut en disposer de manière que des valeurs convenables et finies des coefficients de $f(x)$ réduisent au degré m le reste de la division de $f(x)\chi(x)$ par $F'(x)$. Représentons ce reste du degré m par $\chi_1(x)$, nous aurons l'égalité

$$(1) \qquad f(x)\chi(x) = F'(x)\psi_1(x) + \chi_1(x),$$

$\psi_1(x)$ et $\chi_1(x)$ ne renfermant les coefficients de $f(x)$ qu'au premier degré ; si nous faisons tendre les coefficients de $\chi(x)$ vers ceux de $F_1(x)$, d'après une loi quelconque, les coefficients de $f(x)$ varieront, et un ou plusieurs d'entre eux croîtront indéfiniment. Soit r celui d'entre eux qui tend vers l'infini de l'ordre le plus élevé; divisons par r les deux membres de l'égalité (1) avant de faire tendre les coefficients de $\chi(x)$ vers ceux de $F_1(x)$, nous aurons

$$(2) \qquad \frac{f(x)}{r}\chi(x) = F'(x)\frac{\psi_1(x)}{r} + \frac{\chi_1(x)}{r}.$$

Si maintenant nous faisons tendre les coefficients de $\chi(x)$ vers ceux de $F_1(x)$, le quotient $\frac{f(x)}{r}$ tendra vers un polynôme de degré inférieur à celui de $f(x)$, mais dont tous les termes ne pourront se réduire à zéro. Les quotients $\frac{\psi_1(x)}{r}$ et $\frac{\chi_1(x)}{r}$ ne peuvent se réduire qu'à des degrés respectivement moindres que ceux de $\psi_1(x)$ et $\chi_1(x)$; donc, dans ce cas, il suffira de multiplier $F_1(x)$ par un polynôme de degré inférieur à $m-2$, pour qu'en divisant le produit par $F'(x)$ on obtienne un reste dont le degré ne surpasse pas m.

On peut observer que, dans ce cas, la somme des degrés des équations dont les racines séparent les racines de la

proposée est inférieure de plus d'une unité à celle de cette équation; donc elle a des racines imaginaires.

Remarque II. — Nous croyons avoir établi ainsi d'une manière rigoureuse que la séparation des racines d'une équation dont le degré ne surpasse pas $2m+1$ peut se ramener à la séparation de celles de quatre équations dont les degrés ne surpassent pas m; mais ce n'est peut-être pas le moyen le plus avantageux d'appliquer notre théorème, la généralité de sa forme permet d'en modifier l'usage. Si, par exemple, nous représentons par Q_1 le quotient de la division de $F'(x)$ par $F_1(x)$ et par $f_1(x)$ le reste de cette opération, nous pourrons donner à l'égalité

$$F(x) = (ax+b)F'(x) + F_1(x)$$

la forme

$$F(x) = F_1(x)[(ax+b)Q_1+1] + (ax+b)f_1(x);$$

et, en répétant un raisonnement déjà fait, on voit qu'il suffit, pour effectuer la séparation des racines de $F(x)=0$, de ranger par ordre de grandeur les racines réelles des trois équations

$$F_1(x) = 0,$$
$$f_1(x) = 0,$$
$$ax+b = 0.$$

Les degrés des deux premières sont inférieurs de deux ou trois unités à celui de l'équation proposée; celui de la dernière est 1; donc il suffit, pour séparer les racines d'une équation, de savoir séparer celles des équations dont le degré est inférieur d'au moins deux unités. On peut ainsi se dispenser de l'usage des coefficients indéterminés.

VI. Le moyen de séparation que nous venons d'exposer s'applique avec succès à quelques exemples que nous allons successivement examiner.

1° L'équation trinôme

$$x^m + px^n + q = 0.$$

On sait que les racines de cette équation sont séparées par celles de la dérivée, ce qui, du reste, peut se déduire de notre théorème en y faisant $\varphi(x)$ identiquement nulle, et $f(x)$ égale à un; mais on peut aussi poser les égalités

$$x^m + px^n + q = \frac{x}{m}(mx^{m-1} + npx^{n-1}) + \left(1 - \frac{n}{m}\right)px^n + q$$

$$= \frac{x}{n}(mx^{m-1} + npx^{n-1}) - \left(\frac{m}{n} - 1\right)x^m + q.$$

Les racines de l'équation sont donc aussi séparées par le nombre zéro, joint aux racines de l'une des équations binômes

$$(m-n)px^n + mq = 0,$$
$$(m-n)x^m - nq = 0.$$

2° L'équation à quatre termes dans laquelle les exposants de la variable forment une progression arithmétique dans trois des termes, et qui est de l'une des formes

$$x^m + ax^{m-r} + bx^{m-2r} + c = 0,$$
$$x^n + ax^{2r} + bx^r + c = 0.$$

Dans le premier cas, les racines de l'équation dérivée qui peuvent être obtenues séparent les racines de l'équation. Dans le deuxième cas, on a l'égalité

$$x^n + ax^{2r} + bx^r + c$$
$$= \frac{x}{n}(nx^{n-1} + 2rax^{2r-1} + rbx^{r-1})$$
$$+ a\left(1 - \frac{2r}{n}\right)x^{2r} + b\left(1 - \frac{r}{n}\right)x^r + c.$$

Les racines sont séparées par le nombre zéro, joint aux

racines de l'équation résoluble

$$a(n-2r)x^{2r}+b(n-r)x^{r}+c=0.$$

On doit remarquer que l'ordre de grandeur de l'exposant n par rapport aux autres est indifférent.

3° L'équation à quatre termes dans laquelle la somme des exposants des termes moyens est égale à celle des exposants des termes extrêmes

$$F(x)=x^{m}+ax^{m-r}+bx^{r}+c=0.$$

Divisant le produit $(x^{r}-\alpha)F(x)$ par $F'(x)$, et disposant de α de manière à rendre nul le coefficient du terme en x^{m-r} dans le reste, on obtient un quotient binôme et un reste de la forme

$$\alpha x^{2r}+\beta x^{r}+\gamma=0;$$

la question est donc résolue.

RECHERCHES ANALYTIQUES

sur la surface du troisième ordre qui est la réciproque de la surface de Steiner

(suite, voir même tome, p. 337);

PAR M. LAGUERRE.

---

18. Je ferai encore quelques remarques sur les propositions précédentes.

Par tout point M, pris sur la surface $\mathcal{X}$, passent deux cubiques appartenant à l'asymptotique Z; ces deux courbes définissent parfaitement le point M, dont on peut ainsi fixer la position sur la surface par les valeurs des paramètres t et t' des points de Z qui sont les som-

mets des cônes touchant la surface suivant les cubiques considérées.

En un point (t, t') de $\mathcal{X}$, l'équation du plan tangent est

$$\mathcal{E}_0 = t'^2(at^2 + 2bt\tau + c\tau^2) + 2t'\tau'(bt^2 + 2ct\tau + d\tau^2) + \tau'^2(ct^2 + 2dt\tau + e\tau^2) = 0;$$

on voit ici apparaître l'émanant principal de u; les deux autres émanants

$$\mathcal{E}' = t'(at^3 + 3bt^2\tau + 3ct\tau^2 + d\tau^3) + \tau'(bt^3 + 3ct^2\tau + 3dt\tau^2 + e\tau^3)$$

et

$$\mathcal{E} = t(at'^3 + 3bt'^2\tau' - 3ct'\tau'^2 + d\tau'^3) + \tau(bt'^3 + 3ct'^2\tau' + 3dt'\tau'^2 + e\tau'^3)$$

représentent, comme nous l'avons vu, les plans passant par le point (t, t') et les tangentes (t) et (t'), ou encore les plans osculateurs des cubiques, appartenant à l'asymptotique Z, qui se croisent au plan considéré.

Le plan tangent au point (t, t') passe évidemment par les deux points (t) et (t').

Il serait facile d'exprimer en fonction des paramètres t et t' les coordonnées du point (t, t'); mais je laisse de côté cette recherche, qui me serait inutile en ce moment.

III. — *Sur les lignes nodales des surfaces développables dont les asymptotiques sont les arêtes de rebroussement* (*).

19. La surface développable $\mathcal{D}$, dont la sextique Z est l'arête de rebroussement, a pour ligne nodale une quartique $\mathcal{N}$ dont il est facile d'obtenir les équations.

(*) On sait (*voir* Cayley, *loc. cit.*) que ces lignes nodales sont des courbes du quatrième ordre et de seconde espèce (c'est-à-dire par lesquelles on ne peut faire passer qu'une seule surface du second ordre);

Pour tout point de cette courbe, l'équation

$$u = 0$$

a deux couples de racines égales; elle est donc définie par le système d'équations

$$\frac{ac - b^2}{a} = \frac{ad - bc}{2b} = \frac{ae + 2bd - 3c^2}{6c} = \frac{be - cd}{2d} = \frac{ce - d^2}{e},$$

d'où l'on déduit, en vertu de l'identité

$$a\varepsilon - 4b\delta + 6c\gamma - 4d\beta + e\alpha = 0,$$

$$\varepsilon(ac - b^2) - 2\delta(ad - bc) + \gamma(ae + 2bd - 3c^2)$$
$$- 2\beta(be - cd) + \alpha(ce + d^2) = 0.$$

Telle est l'équation de la quadrique $\mathfrak{Q}$, qui contient la ligne nodale; en conservant les notations du § I, on voit que cette équation est

$$h = 0.$$

---

dans tout ce qui suit, je les appellerai, pour abréger, simplement *quartiques,* en réservant le nom de *biquadratiques* aux courbes du quatrième ordre qui résultent de l'intersection de deux surfaces du second ordre. J'appellerai de même *sextiques* les courbes du sixième ordre et de quatrième classe qui sont les asymptotiques de la surface réciproque de la surface de Steiner. Les sextiques sont les réciproques des surfaces développables qui ont des quartiques pour arêtes de rebroussement.

Les paragraphes qui suivent peuvent être considérés comme un chapitre partiel de la théorie des quartiques et des sextiques.

A ce sujet, il ne sera peut-être pas inutile d'indiquer le sens géométrique des deux équations

$$i = 0 \quad \text{et} \quad j = 0.$$

Relativement à la surface de Steiner, elles donnent lieu aux deux propositions suivantes :

I. *Étant donnée une quartique, l'enveloppe des plans qui coupent cette courbe en quatre points équiharmoniques est la surface du second ordre que l'on peut mener par la quartique.*

II. *Étant donnée une quartique, l'enveloppe des plans qui coupent cette courbe en quatre points harmoniques est la surface de Steiner dont cette quartique est une asymptotique.*

D'après le tableau A, l'équation générale des quadriques $\mathfrak{Q}_\rho$, contenant les nodales relatives aux diverses asymptotiques de la surface, sera donc

$$\mu\theta i + (\lambda\theta + \rho\mu)h + \lambda\rho k = 0,$$

le rapport $\mu:\lambda$ étant lié au rapport $\rho:\theta$ par la relation

$$\frac{\mu}{\lambda} = \frac{2\rho(3j_0\rho - i_0\theta)}{i_0\rho^2 - 3\theta^2}.$$

Toutes ces quadriques, ainsi que les quadriques $\mathcal{S}_\rho$, sont comprises dans le réseau (i, h, k).

20. On peut, par une quartique donnée $\mathfrak{N}$, faire passer une infinité de surfaces réglées du troisième ordre. Prenons, en effet, arbitrairement une corde de cette courbe, c'est-à-dire une droite s'appuyant sur elle en deux points; tout plan passant par cette corde fixe rencontre de nouveau la courbe en deux points. Le lieu des cordes mobiles qui les joignent est évidemment une surface réglée du troisième ordre ayant la corde fixe pour ligne double.

Il est facile d'obtenir l'équation de cette surface.

A cet effet, je considérerai le covariant du sixième degré de u

$$L = (a^2d + 3b^3 - 3abc)t^6 + \ldots$$

(on sait que tous ses coefficients s'annulent pour les points de la ligne nodale) et l'émanant principal de L

$$L_0 = t'^3\frac{d^3L}{dt^3} + 3t'^2\tau'\frac{d^3L}{dt^2d\tau} + 3t'\tau'^2\frac{d^3L}{dt\,d\tau^2} + \tau'^3\frac{d^3L}{d\tau^3};$$

l'équation

$$L_0 = 0$$

représente une surface du troisième ordre qui contient

la quartique $\mathfrak{N}$; il est facile de voir que cette surface est réglée.

On a, en effet, en conservant les notations précédentes et en posant, pour abréger,

$$u' = at'^4 + 4bt'^3\tau' + 6ct'^2\tau'^2 + 4dt'\tau'^3 + e\tau t',$$

l'identité suivante

$$u\mathcal{E}^2 - u'\mathcal{E}'^2 = (t\tau' - t'\tau)^3 L_0 \,(*);$$

d'où l'on voit que l'équation de la surface peut se mettre sous la forme

$$u\mathcal{E}^2 - u'\mathcal{E}'^2 = 0,$$

équation d'une surface réglée dont les diverses génératrices sont données par le système simultané d'équations

$$u = \lambda^2 u' \quad \text{et} \quad \mathcal{E}' = \lambda \mathcal{E},$$

où λ désigne un paramètre arbitraire.

(*) Sur cette identité, voir (*Bulletin de la Société Philomathique* et journal *l'Institut*, mars 1872), ma *Note sur les covariants doubles des formes binaires*.

La proposition fondamentale relative aux covariants doubles peut s'énoncer ainsi :

Étant donné un système quelconque S de formes binaires, tout covariant double de ce système peut se mettre sous la forme

$$(A) + (B)\omega + (C)\omega^2 + \ldots;$$

(A), (B),... désignant des émanants des formes A, B, et ces formes étant elles-mêmes des covariants du système S; ω représente le covariant double général

$$xy' - yx'.$$

Depuis la publication de la Note dont je viens de parler, j'ai reconnu que M. Clebsch s'était appuyé sur la même proposition dans son ouvrage sur les formes binaires; je crois toutefois pouvoir faire remarquer à ce sujet que, dès 1860, je l'avais communiquée à M. Hermite en lui faisant connaître les premiers principes d'une nouvelle théorie des formes binaires qui est restée inédite.

21. Les équations de la droite double de cette surface sont

$$\mathcal{C} = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{C}' = 0,$$

et telle est l'équation générale (renfermant deux paramètres arbitraires t et t') des cordes de la quartique.

La seconde directrice rectiligne de cette surface a pour équations

$$u = 0 \quad \text{et} \quad u' = 0.$$

Si l'on convient d'appeler *droite appartenant à une développable* les droites qui résultent de l'intersection de deux plans tangents à cette développable, on peut donc énoncer la proposition suivante :

Théorème V. — *Étant donnée une quartique quelconque, cette courbe est la ligne nodale d'une surface développable du sixième ordre et de la quatrième classe ; par toute droite appartenant à cette surface développable et la quartique, on peut faire passer une surface réglée du troisième ordre.*

22. L'équation générale des surfaces réglées du troisième ordre passant par la quartique $\mathcal{N}$ peut se mettre encore sous une autre forme remarquable, et qui résulte de l'identité

$$(t\tau' - t'\tau)L_0 = uH' - u'H;$$

d'où l'équation

$$uH' - u'H = 0$$

et la conséquence suivante :

La courbe d'intersection de deux cônes quelconques appartenant à l'asymptotique Z *et la quartique* $\mathcal{N}$ *sont situées sur une même surface réglée du troisième ordre.*

Cette même surface réglée contient aussi la courbe du dixième ordre qui est l'intersection (partielle) des sur-

faces développables dont les arêtes sont les deux cubiques suivant lesquelles la surface $\mathfrak{X}$ est touchée par les deux cônes dont je viens de parler.

Ces deux surfaces (*voir* n° 12) ont, en effet, pour équations

$$ju - i\mathrm{H} = 0 \quad \text{et} \quad ju' - i\mathrm{H}' = 0;$$

en éliminant j et u, on obtient l'équation précédente, ce qui démontre la proposition énoncée.

23. Lorsque l'on fait

$$t' = t,$$

les deux directrices rectilignes des surfaces du troisième ordre se confondent, et l'on obtient les variétés singulières signalées par M. Cayley (*voir* Salmon : *Analytic Geometry of three dimensions*, § 447).

L'équation de ces surfaces est $\mathrm{L} = 0$.

24. Par la sextique Z et la quartique $\mathfrak{N}$, on peut faire passer une infinité de surfaces du quatrième ordre dont l'équation est

$$3ju - 2i\mathrm{H} = 0.$$

Je ferai remarquer encore, et je reviendrai plus tard sur ce sujet, que la ligne nodale $\mathfrak{N}$ est située sur la surface de Steiner $\mathfrak{S}$, qui est la polaire réciproque de $\mathfrak{X}$ par rapport à la quadrique $\mathfrak{s}$.

IV. — *Sur les polygones que l'on peut circonscrire à une sextique gauche.*

25. Soit une sextique gauche Z, définie comme l'arête de rebroussement de la surface enveloppée par le plan variable

$$u = at^4 + 4bt^3\tau + 6ct^2\tau^2 + 4dt\tau^3 + e\tau^4 = 0.$$

Supposons que les tangentes, en deux points (t) et (t') de cette courbe, se rencontrent en un point M (qui appartient nécessairement à la nodale $\mathfrak{N}$).

Les équations de ces tangentes sont

$$
\begin{aligned}
&at^3 + 3bt^2\tau + 3ct\tau^2 + e\tau^3 = 0,\\
&bt^3 + 3ct^2\tau + 3dt\tau^2 + e\tau^3 = 0,\\
&at'^3 + 3bt'^2\tau' + 3ct'\tau'^2 + d\tau'^3 = 0,\\
&bt'^3 + 3ct'^2\tau' + 3dt'\tau'^2 + c\tau'^3 = 0.
\end{aligned}
$$

Ces quatre équations et l'équation identique

$$a\varepsilon - 4b\beta + 6c\gamma - 4d\delta + e\alpha = 0$$

devant être satisfaites pour les coordonnées du point M, on obtiendra la relation qui lie entre eux les paramètres t et t', en égalant à zéro le déterminant de ce système d'équations.

La valeur de ce déterminant peut s'obtenir immédiatement en remarquant que c'est un covariant double de ω, du premier degré par rapport aux coefficients de ce polynôme, et du sixième degré par rapport aux variables t, τ et aux variables t, τ'; en se reportant à la note qui précède le paragraphe précédent, on voit immédiatement que ce déterminant a pour valeur

$$(t\tau' - t'\tau)^4 \mathfrak{J}_0,$$

$\mathfrak{J}_0$ désignant l'émanant principal de ω

$$
\begin{aligned}
t'^2(\alpha t^2 + 2\beta t\tau + \gamma\tau^2) + 2t'\tau'(\beta t^2 + 2\gamma t\tau + \delta\tau^2)&\\
+ \tau'^2(\gamma t^2 + 2\delta t\tau + \varepsilon\tau'^2)&;
\end{aligned}
$$

en sorte que la relation qui existe entre les paramètres t et t' est

$$\mathfrak{J}_0 = 0.$$

Les coordonnées du point M s'expriment facilement en

fonction des paramètres t et t', et sont données par le système d'équations

$$\frac{a}{1} = \frac{2b}{-(t+t')} = \frac{6c}{t^2+4tt'+t'^2} = \frac{2d}{-tt'(t+t')} = \frac{e}{t^2t'^2} \text{ (*)}.$$

26. L'équation

$$\mathfrak{F}_0 = 0$$

donne lieu à une remarque importante.

C'est l'intégrale de l'équation d'Euler qui sert de base à la théorie des fonctions elliptiques.

D'où la proposition suivante :

Théorème VI. — *Si l'on peut circonscrire un polygone gauche à une sextique, on peut lui circonscrire une infinité de polygones du même nombre de côtés.*

Remarque. — Il est clair que, pendant que les côtés du polygone roulent sur la sextique, ses sommets décrivent la quartique $\mathfrak{K}$.

On a ainsi un polygone mobile dont les sommets se meuvent sur une quadrique, tandis que ses côtés enveloppent une courbe tracée sur une autre quadrique ; c'est un point particulier d'une question digne, je crois, d'intérêt, et sur laquelle je reviendrai. Je me suis déjà occupé du problème général dans une communication faite à la Société Philomathique, en m'appuyant sur l'extension à l'espace de la théorie de Jacobi relative aux courbes planes du second ordre, extension que j'ai fait connaître dans une Note présentée à l'Institut sur l'*Intégration d'une certaine classe d'équations différentielles.*

27. En particulier, si l'on peut circonscrire un triangle

(*) Ici, pour simplifier l'écriture, j'ai fait, comme je le ferai souvent dans la suite, $\tau = \tau' = 1$.

à une sextique Z, on peut en circonscrire une infinité; en d'autres termes, si l'on peut mener un plan tritangent à la sextique, on peut lui en mener une infinité.

Si l'on se reporte à la relation

$$\mathfrak{J}_0 = 0,$$

on verra facilement que ce cas se présente quand l'on a

$$i_0 = 0.$$

Comme l'a remarqué M. Cremona (*), cette relation signifie que les quatre points cuspidaux de Z sont en rapport équiharmonique.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Quand les quatre points cuspidaux d'une sextique sont en rapport équiharmonique, on peut mener à cette courbe une infinité de plans tritangents.

Je montrerai plus loin que, dans ce cas, la sextique est située sur un cône du second degré.

28. La considération de l'équation $\mathfrak{J}_0 = 0$ montre aussi facilement que la condition, pour que l'on puisse circonscrire à la sextique Z un quadrilatère, est

$$j_0 = 0.$$

D'où, en se reportant aux observations déjà citées de M. Cremona, la proposition suivante :

Quand les quatre points cuspidaux d'une sextique sont en rapport harmonique, on peut lui circonscrire une infinité de quadrilatères gauches.

M. Cayley a remarqué (**) que, quand l'on a $j_0 = 0$, la sextique est l'arête de rebroussement d'une surface

---

(*) *Voir* les Notes de M. Cayley *sur les torses sextiques* déjà citées.

(**) *Notes sur les torses sextiques* déjà citées.

développable circonscrite à deux quadriques se touchant d'un contact simple.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Quand deux quadriques ont entre elles un contact simple, on peut circonscrire une infinité de quadrilatères gauches à l'arête de rebroussement de la surface développable circonscrite à ces deux quadriques.

(*La suite prochainement.*)

NOTE SUR L'ELLIPSE

Au sujet de questions proposées dans les Nouvelles Annales;

PAR M. J.-J.-A. MATHIEU,
Chef d'escadrons d'Artillerie.

I.

Le *théorème* dit *de Mac-Cullagh*, qu'on tire si facilement, par la méthode projective, d'un théorème bien connu de Géométrie élémentaire, apprend que :

1. *Quand un triangle est inscrit dans une ellipse, le rayon du cercle circonscrit est égal au produit des trois demi-diamètres parallèles aux côtés divisé par le produit des deux demi-axes.*

Si l'on fait décroître indéfiniment les côtés, ce qui transforme le cercle circonscrit au triangle en cercle osculateur à l'ellipse, on conclut que :

2. *Le rayon de courbure, en un point quelconque de l'ellipse, est égal au cube du demi-diamètre parallèle à la tangente du point divisé par le produit des deux demi-axes.*

Par combinaison des théorèmes 1 et 2, on trouve sans difficulté que :

3. *Quand un triangle est inscrit dans une ellipse, le cube du rayon du cercle circonscrit est égal au produit des trois rayons de courbure des points dont les tangentes sont parallèles aux côtés* (*).

Comme cas particulier du théorème 3, on tombe sur celui qui fait l'objet de la question 1087 (**) :

4. *Le produit des rayons de courbure de l'ellipse aux sommets d'un triangle inscrit, dont le centre de gravité coïncide avec le centre de l'ellipse, est égal au cube du rayon du cercle circonscrit au triangle* (***).

(*) Cette proposition a été donnée par M. Faure, dans son *Recueil de théorèmes relatifs aux sections coniques*, p. 47.

(**) Des solutions identiques nous ont été envoyées par M. Gambey, professeur au lycée de Saint-Étienne, A. Pellissier, capitaine d'Artillerie, et A. Hilaire, professeur au lycée de Douai. MM. Moret-Blanc et H. Lez ont également résolu la question.

(***) La proposition 1087 se déduit assez simplement de la proposition 1002, due à *Steiner*, et démontrée dans le tome X, 2e série, pages 460 et 462.

En effet, dans le cas actuel, la normale à l'ellipse au sommet A du triangle ABC est dirigée suivant la hauteur AH du triangle. Si l'on prend sur cette normale, en dehors de la courbe, une longueur AK, égale au rayon de courbure ρ_1 de l'ellipse au sommet A, et qu'on mène ensuite du point K une perpendiculaire KG sur le rayon OA prolongé, on aura, d'après le théorème de Steiner,

$$\mathrm{OA} \times \mathrm{OG} = a^2 + b^2 = \mathrm{OA}^2 + \mathrm{OM}^2,$$

en désignant par OM le rayon de l'ellipse conjugué de OA. Cette égalité peut s'écrire

$$\mathrm{OA}(\mathrm{OA} + \mathrm{AG}) = \mathrm{OA}^2 + \mathrm{OM}^2,$$

et se réduit à

$$\mathrm{OA} \times \mathrm{AG} = \mathrm{OM}^2.$$

En observant que le rayon OA est égal aux deux tiers de la médiane AD, l'égalité précédente devient

$$2\,\mathrm{AD} \times \mathrm{AG} = 3\,\mathrm{OM}^2;$$

II.

La méthode projective rend d'une évidence intuitive le théorème suivant :

5. *L'ellipse est isopérimètre avec le cercle qui a pour rayon la limite vers laquelle convergent les moyennes arithmétiques des systèmes de rayons qui répondent à la division par secteurs équivalents du quadrant d'ellipse, c'est-à-dire des rayons qui correspondent à la division régulière du cercle de projection.*

Le rayon de l'ellipse, en fonction de l'angle mesuré dans le cercle de projection, est

$$\rho = \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi};$$

---

mais l'équation de l'ellipse rapportée aux rayons conjugués OA, OM donne

$$DB^2 = \frac{3}{4} OM^2,$$

d'où

$$BC^2 = 3 OM^2;$$

donc

$$2 AD \times AG = BC^2.$$

Remarquons maintenant que, les quatre points K, G, H, D appartenant à une même circonférence, on a

$$AD \times AG = AK \times AH = \rho_1 \times AH.$$

Il en résulte

$$2\rho_1 \times AH = BC^2; \quad 2\rho_1 \times AH \times BC = BC^3; \quad 4\rho_1 \times S = BC^3,$$

en nommant S l'aire du triangle ABC. De là $\rho_1 = \frac{BC^3}{4S}$.

On démontrerait de même que les rayons de courbure ρ_2, ρ_3 aux sommets B, C ont pour valeurs $\frac{AC^3}{4S}$, $\frac{AB^3}{4S}$; donc

$$\rho_1 \rho_2 \rho_3 = \left(\frac{AB.AC.BC}{4S}\right)^3 = R^3.$$

(G.)

changeant φ en $\frac{\pi}{2}+\varphi$, on trouve le rayon conjugué

$$\rho' = \sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}.$$

Il faut bien remarquer que la somme de deux rayons conjugués croît avec l'angle φ, depuis zéro jusqu'à $\frac{\pi}{4}$, car

$$\begin{aligned}\rho+\rho' &= \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi} + \sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}\\ &= \sqrt{a^2+b^2+\sqrt{4a^2b^2+c^4\sin^2 2\varphi}}.\end{aligned}$$

Pour sommer les rayons du quadrant d'ellipse, il suffirait de sommer $\rho+\rho'$ pour les valeurs de φ croissant en progression arithmétique de zéro à $\frac{\pi}{4}$.

Partageons cette somme de m termes, ou de $2m$ rayons conjugués deux à deux, en n sommes partielles renfermant chacune le même nombre z de termes, on aura $m = nz$; n sera un nombre entier, peu élevé si l'on veut éviter les calculs compliqués; quant à z, qui s'élimine de lui-même, on pourra le supposer aussi grand qu'on voudra.

Chacune des sommes partielles restera toujours comprise entre z fois son premier terme et z fois son dernier terme, puisque $\rho+\rho'$ croît avec φ. Il résulte de là qu'en représentant par E le périmètre de l'ellipse, on doit avoir

$$\begin{aligned}&\frac{\pi}{n}\sum_0^{n-1}\sqrt{a^2+b^2+\sqrt{4a^2b^2+c^4\sin^2\frac{\pi x}{2n}}}\\ &\quad < E < \frac{\pi}{n}\sum_1^{n}\sqrt{a^2+b^2+\sqrt{4a^2b^2+c^4\sin^2\frac{\pi x}{n}}}.\end{aligned}$$

Pour $n=1$, on trouve les limites de J. Bernoulli, dont il est question dans le même tome, p. 280; pour

$n = 2, 3, \ldots$, on trouve des limites plus compliquées, mais aussi beaucoup plus exactes, si c est un peu grand.

Je terminerai en citant cet autre théorème, auquel conduit aussi la méthode projective :

6. *L'ellipse est isopérimètre avec le cercle qui a pour rayon la limite vers laquelle convergent les moyennes harmoniques des systèmes de rayons qui répondent à la division par arcs de cordes égales du quadrant de l'ellipse.*

D'où il faut conclure que les moyennes arithmétiques du théorème 5 et les moyennes harmoniques du théorème 6 convergent vers la même limite.

CORRESPONDANCE.

Nous avons reçu de M. F. Siacci, capitaine d'Artillerie dans l'armée italienne, deux très-intéressantes Notes, l'une relative à la théorie des déterminants : *Teorema sui determinanti ed alcune sue applicazioni*; l'autre à celle des polaires réciproques : *Intorno ad una trasformazione simultanea di due forme quadratiche ed alla conica rispetto a cui due coniche date sono polari reciproche.* M. Siacci est auteur d'un *Traité de balistique* annoncé dans le *Bullettino* du prince Balthasar Boncompagni, et de plusieurs autres Mémoires et Notes dont l'une, relative au théorème de Fagnano, est insérée au tome III du même *Bullettino*.

ERRATUM.

Page 381, ligne 30, *au lieu de* un certain nombre, *lisez* une centaine.

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE

de la trajectoire apparente d'un projectile dans le vide;

PAR M. H. RESAL.

Considérons une sphère matérielle (S) animée d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un diamètre OZ, et douée de la propriété d'attirer les éléments matériels placés à distance suivant le rayon en vertu d'une force constante dont nous désignerons par g l'accélération.

Supposons qu'un point m animé d'une vitesse relative initiale déterminée par rapport à (S) décrive un arc de trajectoire assez petit pour que l'on puisse considérer comme constante, pendant le parcours de l'arc, la direction de g.

Dans ces conditions, Bour, dans son Mémoire sur les mouvements relatifs (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*; 1863), prouve que la trajectoire apparente du mobile n'est autre que celle qui résulterait de son mouvement sur une parabole du second degré, dont le plan tournerait autour d'un axe parallèle à OZ, compris dans le méridien du lieu, avec une vitesse angulaire égale et contraire à celle de la sphère. Ce résultat est obtenu en faisant l'application des équations du mouvement relatif auxquelles Bour est parvenu à donner la forme canonique.

J'ai cherché, immédiatement après la publication de ce travail, à établir directement le théorème ci-dessus énoncé sans employer les équations de la Mécanique analytique, étendues, comme je viens de le dire, aux mouvements relatifs, qui supposent la connaissance des

hautes Mathématiques, et je ne suis pas arrivé au résultat ci-dessus énoncé. Nous devions examiner ensemble, Bour et moi, cette question, lorsque la mort est venue surprendre le savant géomètre.

J'avais perdu de vue le problème dont il s'agit, lorsque, dernièrement, j'ai retrouvé quelques notes qui remontent à huit ans environ. J'ai pensé qu'il ne serait pas sans intérêt d'en faire connaître la substance et de fixer définitivement un point en litige des applications si peu nombreuses de la théorie des mouvements relatifs.

Soient :

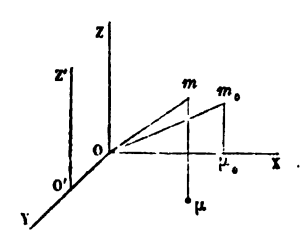
O le centre de la sphère ;

OX la perpendiculaire à OZ dans le plan méridien passant par un point quelconque m_0 de la trajectoire ;

OY la perpendiculaire en O au plan ZOX ;

μ la projection, sur le plan de l'équateur YOX, d'une position quelconque m du mobile ;

x, y, z les coordonnées de m parallèles à OX, OY, OZ ;



n la rotation constante de (S) autour de OZ dont le sens est supposé de la droite vers la gauche pour l'observateur couché suivant l'axe en ayant les pieds en O ;

ω l'angle m_0OZ formé par le rayon m_0O avec OZ, considéré comme très-sensiblement égal à celui que forme, avec le même axe, le rayon mO correspondant à une po-

sition quelconque m du mobile pour l'étendue de l'arc parcouru.

Si l'on considère aussi comme sensiblement constante la direction de g, on devrait, pour la même raison, admettre que l'accélération centrifuge ne doit varier ni en grandeur ni en direction. Cette restriction n'ayant pas été faite par Bour, nous la considérerons d'abord comme non avenue.

L'accélération centrifuge donne les composantes

$$n^2 x \quad \text{suivant} \quad \mathrm{OX},$$
$$n^2 y \quad \text{suivant} \quad \mathrm{OY},$$

et l'accélération centrifuge composée les suivantes, en partant de théorèmes que j'ai donnés dans mon *Traité de Cinématique pure*,

$$-2n\frac{dy}{dt} \quad \text{suivant} \quad \mathrm{OX},$$
$$2n\frac{dx}{dt} \quad \text{suivant} \quad \mathrm{OY}.$$

Il vient donc

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g\sin\omega + n^2x - 2n\frac{dy}{dt},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = n^2y + 2n\frac{dx}{dt},$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g\cos\omega,$$

ou

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2} + 2n\frac{dy}{dt} = n^2x - g\sin\omega,\\ &\frac{d^2y}{dt^2} - 2n\frac{dx}{dt} = n^2y,\\ &\frac{d^2z}{dt^2} = -g\cos\omega.\end{aligned}\right.$$

Les premiers membres de ces équations ne sont autres que ceux des formules dites de *Poisson*, appliquées au pôle.

Ces équations ont pour intégrales

$$(2)\quad \begin{cases} x - \dfrac{g\sin\omega}{n^2} = \mathrm{A}\cos(nt+\alpha) + \mathrm{B}t\cos(nt+\beta), \\ y = \mathrm{A}\sin(nt+\alpha) + \mathrm{B}t\sin(nt+\beta), \\ z = -\dfrac{g\cos\omega}{2}t^2 + \mathrm{C}t + \mathrm{D}, \end{cases}$$

A, B, C, D, α, β étant six constantes que l'on déterminera par les conditions que, pour $t = 0$, on ait

$$x = x_0,\quad y = 0,\quad z = z_0,\quad \frac{dx}{dt} = x'_0,\quad \frac{dy}{dt} = y'_0,\quad \frac{dz}{dt} = z'_0.$$

Mais, à l'inspection des équations (2), on voit de suite que la trajectoire ne peut pas être comprise dans un plan tournant autour de l'axe O'Z' parallèle à OZ, distant de ce dernier de $\mathrm{OO}' = \dfrac{g\sin\omega}{n^2}$ (OZ' est la position que Bour assigne à l'axe de rotation du plan de sa parabole).

Supposons maintenant, comme il est convenable de le faire, que l'accélération centrifuge soit considérée comme constante en grandeur et en direction, et désignons alors par g la résultante de cette accélération et de l'accélération attractive de (S), O devenant le point où sa direction rencontre l'axe de rotation OZ. Les formules dont nous devrons faire usage ne seront autres que les équations (1), dans lesquelles nous négligerons les termes n^2x, n^2y, et nous aurons

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + 2n\dfrac{dy}{dt} = -g\sin\omega, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} - 2n\dfrac{dx}{dt} = 0, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = -g\cos\omega, \end{cases}$$

équations dont les intégrales sont

$$(4)\quad \begin{cases} x = \mathrm{A}\cos(2nt+\alpha)+\mathrm{B}, \\ y + \dfrac{g\sin\omega}{2n}t = \mathrm{A}\sin(2nt+\alpha)+\mathrm{C}\ (^*), \\ z = -\dfrac{g\cos\omega}{2}t^2 + \mathrm{D}t + \mathrm{E}. \end{cases}$$

On déterminera les constantes A, B, C, D, E, α de la même manière que ci-dessus.

Posons

$$(5)\quad \begin{cases} x_1 = \mathrm{A}\cos(2nt+\alpha), \\ y_1 = \mathrm{A}\sin(2nt+\alpha), \\ z_1 = -\dfrac{g\cos\omega}{2}t^2 + \mathrm{D}t; \end{cases}$$

x_1, y_1, z_1 seront les coordonnées du mobile par rapport à trois axes parallèles aux premiers, et dont l'origine O_1 a pour coordonnées

$$(6)\qquad x = \mathrm{B},\quad y = \mathrm{C} - \frac{g\sin\omega}{2n}t,\quad z = \mathrm{E}.$$

Le système de ces trois derniers axes est aussi animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme parallèle à OY avec la vitesse $\dfrac{g\sin\omega}{2n}$.

Les deux premières des équations (5) montrent que la projection du mobile sur le plan $X_1O_1Y_1$ est un point situé à une distance constante $\sqrt{\mathrm{A}}$ de O_1 et sur un rayon $O_1\mu_1$, qui, en projection sur le plan XOY, tourne relativement au mouvement de (S) avec la vitesse angulaire $2n$ en

---

(*) Il est facile de voir que, si $n = 0$, les deux premières de ces équations se réduisent à

$$x = -\frac{g\sin\omega}{2}t^2 + \mathrm{M}t + \mathrm{N},\quad y = \mathrm{M}'t + \mathrm{N}',$$

M, M', N, N' étant des constantes arbitraires.

sens inverse de celle n de OX, c'est-à-dire avec la vitesse angulaire n dans l'espace absolu.

On peut donc dire que la trajectoire relative du mobile peut être considérée comme le résultat d'un mouvement rectiligne uniformément varié, parallèle à l'axe de rotation de (S), dans un plan tournant avec une vitesse angulaire égale et contraire à celle de ce système, autour d'une parallèle à ce dernier axe, elle-même animée d'un mouvement de translation uniforme perpendiculaire au méridien du lieu.

Quoique cette interprétation géométrique soit loin d'être élégante, il ne m'a pas paru inutile de la signaler.

SUR LES VINGT-HUIT TANGENTES DOUBLES D'UNE COURBE DU QUATRIÈME DEGRÉ;

PAR M. ARONHOLD (*).

(Traduit de l'allemand. — Extrait des *Comptes rendus mensuels de l'Académie de Berlin*; 1864.)

L'application de la théorie des formes homogènes du quatrième degré à trois variables conduit dans beaucoup de cas à un problème dont l'interprétation géométrique est la détermination des tangentes doubles d'une courbe du quatrième ordre. Dans les recherches de Steiner et de M. Hesse, publiées dans le tome XLIX du *Journal de Crelle*, p. 243, 265 et 279, recherches qui renferment ce qui a été publié d'essentiel sur ce sujet, ces géomètres se sont surtout occupés des propriétés des points de contact

---

(*) Voir *Nouvelles Annales*, 2e série, t. VI, p. 241, la traduction du Mémoire de Steiner sur ce sujet.

des doubles tangentes, propriétés dont on déduit du reste d'importantes conséquences relativement aux doubles tangentes elles-mêmes. J'ai réussi, par des considérations directes, à établir entre les doubles tangentes une liaison très-simple, qui non-seulement donne les résultats connus, mais conduit encore à des propriétés nouvelles.

Le développement de ces considérations est l'objet de cette Note.

Une courbe du quatrième ordre étant déterminée par quatorze éléments, on peut se donner sept droites arbitrairement et les prendre comme tangentes doubles d'une courbe du quatrième ordre. Je supposerai d'ailleurs qu'il n'y a entre ces droites aucune relation projective.

1. Sept droites déterminent une infinité de courbes de troisième classe, dont chacune touche toutes ces droites; je dirai que l'ensemble de ces courbes forme un réseau. Si l'on se donne arbitrairement une huitième droite, il y a une infinité de courbes de troisième classe, faisant partie du réseau, qui touchent cette droite et les sept droites données; l'ensemble de ces droites forme un faisceau. Toutes les courbes d'un faisceau ont en commun, d'après un théorème bien connu, une neuvième tangente. D'où il suit que deux courbes quelconques du réseau ont deux tangentes communes (distinctes des sept tangentes fondamentales), lesquelles touchent aussi toutes les courbes d'un faisceau déterminé par ces deux courbes.

Je désignerai ces deux tangentes sous le nom de *couple* du faisceau, et leur point de rencontre sous le nom de *sommet* du faisceau.

2. Je m'appuierai sur le théorème qui suit :

Étant données sept droites fondamentales $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6, G_7$, *si l'on considère une courbe quelconque* C

faisant partie du réseau déterminé par ces droites, les sommets des divers faisceaux dont fait partie C *sont situés sur une même droite* T, *à laquelle est tangente la courbe* C.

Cette tangente n'est pas une tangente singulière de C; elle varie suivant le réseau dont C fait partie; je la désignerai sous le nom de *tangente principale* de C. D'un point quelconque de T on ne peut mener que trois tangentes à C, dont deux forment le couple d'un faisceau et dont la troisième est la tangente principale. On déduit facilement de là qu'une courbe du réseau a une seule tangente principale.

Pour démontrer le théorème fondamental, prenons arbitrairement trois courbes du réseau C_1, C_2 et C_3, et désignons respectivement par S_{12}, S_{23}, S_{31} les sommets des faisceaux déterminés par les courbes C_1 et C_2, C_2 et C_3, C_3 et C_1.

On peut considérer $C_1 S_{23}$, $C_2 S_{31}$, $C_3 S_{12}$ comme des courbes de quatrième classe dont chacune se compose d'un point et d'une courbe de troisième classe.

$C_2 S_{31}$ et $C_3 S_{12}$ ont seize tangentes communes dont trois sont déterminées par les treize autres; toute courbe de quatrième classe tangente à ces treize droites est tangente aux trois premières. C'est ce qui a lieu pour la courbe $C_1 S_{23}$; car, d'après la définition, elle touche les sept droites G, les deux tangentes menées de S_{12} à C_1 et à C_2, les deux tangentes menées de S_{13} à C_1 et à C_3, et enfin les deux tangentes menées de S_{23} à C_2 et C_3; elle touche donc treize tangentes communes à $C_2 S_{31}$ et $C_3 S_{12}$, et par conséquent elle touche aussi les trois autres tangentes communes, c'est-à-dire les droites qui joignent entre eux les points S_{12}, S_{23} et S_{31}; deux de ces droites passent par le point S_{23}, l'autre droite qui joint les points S_{12} et S_{31} est tangente à la courbe C_1, et c'est la tangente principale de

C_1. On ne peut en effet mener du point S_{12} qu'une tangente à C_1 (différente de celles qui forment le couple relatif au faisceau C_1, C_2); et cette tangente restera la même, si on remplace la courbe C_2 par une courbe quelconque C_k du réseau; le lieu des points S_{1k} analogues à S_{12} est donc une droite tangente à C_1.

3. Il résulte d'abord du théorème précédent que les tangentes principales des courbes d'un faisceau passent toutes par le sommet de ce faisceau. De là une construction facile de la tangente principale d'une courbe C; si l'on mène une autre courbe quelconque C_k et si l'on détermine le sommet du faisceau déterminé par ces courbes, la tangente principale de C sera la troisième tangente que l'on peut mener du sommet à C.

4. Réciproquement, étant donnée une droite dans le plan, elle est la tangente principale d'une seule courbe du réseau. En effet, il y a dans chaque faisceau deux courbes qui passent par le sommet de ce faisceau; chacune d'elles touche en ce point une des droites du couple et (Cf. § 3) a cette droite pour tangente principale.

Considérons la droite donnée comme une huitième tangente déterminant un faisceau, et prenons sur cette droite le sommet du faisceau, c'est-à-dire le point où elle est coupée par la neuvième tangente commune à toutes les courbes qui en font partie. La courbe cherchée est celle du faisceau qui touche la droite en ce point.

5. Les théorèmes contenus dans les §§ 1, 2, 3 et 4 renfermant tous les éléments nécessaires pour la solution du problème proposé, on peut immédiatement, et d'une façon très-nette, construire la courbe générale du quatrième ordre qui a pour tangentes doubles les sept droites G.

Partageons le *réseau* des courbes de troisième classe en *faisceaux,* de telle sorte que pour chacun d'eux le couple des tangentes se compose de deux droites coïncidentes. Toutes les courbes d'un tel faisceau se touchent en un point qui sera le sommet du faisceau; la courbe du quatrième ordre est le lieu de ces sommets.

En effet, d'après le § 3, toutes les tangentes principales des courbes d'un de ces faisceaux passent par leur point de contact commun; on obtiendra donc sur chaque courbe C les points du lieu cherché en prenant les intersections de cette courbe avec sa tangente principale. Ce qui donnera quatre points distincts du point de contact, puisque la courbe est du sixième ordre. D'après le § 4, toute droite du plan est la tangente principale d'une courbe du réseau; il y aura sur cette droite, d'après ce que je viens de dire, quatre points du lieu; ce lieu est donc une courbe du quatrième degré K^4.

Reste à faire voir que K^4 a pour tangentes doubles les sept droites G. Je remarque à cet effet que le réseau renferme sept courbes particulières de troisième classe, dont chacune a pour tangente double une des droites G et est ainsi complétement déterminée. Cette tangente est en même temps (§ 4) la tangente principale de la courbe correspondante, et elle la coupe en deux couples de points coïncidents; elle est donc aussi une tangente double de K^4, et l'on peut remarquer que les points de contact sont les mêmes pour K^4 et pour la courbe de troisième classe.

6. Le réseau renferme vingt-huit courbes particulières dont les tangentes principales sont les vingt-huit tangentes doubles de K^4. Sept de ces courbes sont, comme je viens de le montrer, les courbes du réseau qui ont pour tangente double une des droites G. Les autres sont les courbes qui se composent d'un point et d'une conique,

c'est-à-dire du point de rencontre de deux droites G et de la conique qui touche les cinq autres de ces droites. Leur nombre est évidemment $\frac{7.6}{2} = 21$.

Je désignerai la conique qui touche les droites G_3, G_4, G_5, G_6 et G_7 par la notation (3 4 5 6 7), et le point d'intersection des deux droites G_1 et G_2 par la notation (1 2).

Cela posé, les tangentes principales des vingt et une courbes composées dont je viens de parler sont les vingt et une autres tangentes doubles de K^4; toute section conique qui touche cinq des droites G touche une sixième tangente double de K^4, que l'on peut construire au moyen de l'hexagone de Brianchon.

7. Pour démontrer cette proposition, je remarque que, quand on considère comme courbe de sixième ordre une courbe de troisième classe se composant d'un point et d'une conique, cette courbe doit être regardée comme composée de la conique et des deux tangentes menées du point à la conique (chacune de ces tangentes devant être comptée deux fois). Toute tangente à cette conique rencontre donc la courbe en deux couples de points coïncidents; cela est vrai en particulier pour la tangente principale de la courbe, qui, par suite, est une tangente double de K^4.

Si l'on construit une quelconque des vingt et une coniques qui touchent cinq des droites G, (3 4 5 6 7) par exemple, la tangente principale de cette courbe est une tangente double de K^4, et ses points de contact avec K^4 sont les points où elle rencontre les tangentes menées de (1 2) à la conique.

(*La suite prochainement.*)

THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. H. FAURE,
Chef d'escadrons d'Artillerie.

---

1. *Définitions.* — Deux droites A, B et un point f étant donnés, abaissons de ce point des perpendiculaires sur les deux droites, et soient a, b les points où chacune de ces perpendiculaires rencontre l'autre droite. Le cercle décrit sur ab comme diamètre sera appelé le cercle *adjoint* au système des droites A et B par rapport au point f.

Deux plans A, B et un point f étant donnés, abaissons de ce point des perpendiculaires sur les deux plans, et soient a, b les points où chacune de ces perpendiculaires rencontre l'autre plan. La sphère décrite sur ab comme diamètre sera appelée la sphère *adjointe* au système des plans A et B par rapport au point f.

Trois points a, b, f et une droite F étant donnés, joignons le point f aux points a et b; menons par le point f des droites perpendiculaires aux droites fa, fb, ainsi que les droites qui passent par les points a et b et les traces de ces perpendiculaires sur la droite F. Les pieds des perpendiculaires abaissées du point f sur ces quatre droites déterminent un cercle qui sera appelé le cercle *adjoint* au système des points a et b par rapport au point f et à la droite F.

Trois points a, b, f et un plan F étant donnés, joignons le point f aux points a et b; menons par le point f des plans perpendiculaires aux droites fa, fb, ainsi que les plans qui passent par les points a et b et les traces des plans perpendiculaires sur le plan F. Les pieds des per-

pendiculaires abaissées du point f sur ces quatre plans déterminent une sphère qui sera appelée la sphère *adjointe* au système des points a et b par rapport au point f et au plan F.

Remarque. — Lorsque la droite F est à l'infini, le cercle adjoint au système des points a et b se confond avec le cercle décrit sur ab comme diamètre.

Lorsque le plan F est à l'infini, la sphère adjointe au système des points a et b se confond avec la sphère décrite sur ab comme diamètre.

2. Si par un point m on mène une transversale arbitraire rencontrant une conique ou une surface du second degré aux points a et b, le rapport du produit $ma.mb$ au carré du demi-diamètre parallèle à la transversale sera l'indice du point m par rapport à la conique ou par rapport à la surface.

3. Deux triangles abc, $a'b'c'$ étant polaires réciproques par rapport à une conique, si le point a a pour polaire la droite $b'c'$ opposée au sommet a', nous dirons que les points a, a' sont correspondants. Les côtés A, A', respectivement opposés aux sommets a et a', sont aussi correspondants.

Deux tétraèdres $abcd$, $a'b'c'd'$ étant polaires réciproques par rapport à une surface du second degré, si le point a a pour plan polaire la face $b'c'd'$ opposée au sommet a', nous dirons que les points a, a' sont correspondants. Les faces A, A' respectivement opposées aux sommets a et a' sont aussi correspondantes.

4. *Théorème général.* — Deux triangles abc, $a'b'c'$ sont polaires réciproques par rapport à une conique qui a pour centre le point o :

1° On construit, par rapport à un point quelconque f et à sa polaire F, les cercles adjoints aux systèmes de points correspondants aa', bb', cc' et le cercle orthogonal à ces trois cercles; si l'on désigne par α et β les demi-axes principaux de la conique, par g le pied de la perpendiculaire abaissée du point f sur sa polaire F, on a

$$\alpha^2 + \beta^2 = \overline{of}^2 - \frac{\overline{fg}^2}{I_f}\frac{\pi_f}{\pi_g},$$

π_f, π_g étant les puissances des points f et g par rapport au cercle orthogonal, I_f l'indice du point f par rapport à la conique;

2° Construisons, par rapport au point f, les cercles adjoints aux systèmes des droites correspondantes AA′, BB′, CC′ et le cercle orthogonal à ces trois cercles, on a

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{I_f}{\overline{fg}^2}\left(1 - \frac{\pi_g}{\pi_f}\right),$$

π_f, π_g étant les puissances des points f et g par rapport à ce nouveau cercle orthogonal;

3° Si l'on désigne par S et S′ les aires des triangles abc, $a'b'c'$, on a

$$\alpha^2\beta^2 I_f^3 = -4\,SS'\frac{(f, A)(f, B)(f, C)}{(a, A)(b, B)(c, C)}\frac{(f, F)^3}{(a', F)(b', F)(c', F)},$$

en désignant, comme on le fait généralement, par (f, A), (f, B),... les distances du point f aux droites A, B,....

Ce théorème contient un grand nombre de cas particuliers, à cause de l'indétermination du point f et des deux triangles polaires.

Si le point f coïncide avec le centre o de la conique, sa polaire F est à l'infini et l'on a

$$of = 0, \quad I_f = -1, \quad \frac{\pi_g}{\overline{fg}^2} = 1,$$

d'où ce théorème :

Théorème. — Deux triangles *abc*, *a′b′c′* sont polaires réciproques par rapport à une conique qui a pour centre le point *o* :

1° Sur les segments correspondants *aa′*, *bb′*, *cc′* pris pour diamètres, on décrit des cercles, ainsi que le cercle orthogonal à ces trois cercles ; la somme des carrés des demi-axes principaux de la conique est égale à la puissance de son centre *o* par rapport à ce dernier cercle ;

2° Construisons, par rapport au centre *o*, les cercles adjoints aux systèmes de droites correspondantes AA′, BB′, CC′ et le cercle orthogonal à ces trois cercles ; la somme des carrés des valeurs inverses des demi-axes de la conique est égale à l'inverse de la puissance de son centre *o* par rapport au cercle orthogonal ;

3° Le produit des carrés des demi-axes de la conique est égal à quatre fois le produit des aires des triangles polaires, multiplié par le produit des distances du centre de la conique aux côtés de l'un des triangles divisé par le produit des trois hauteurs de ce même triangle.

Lorsque les triangles polaires *abc*, *a′b′c′* coïncident, c'est-à-dire lorsque l'un d'eux *abc* est conjugué à la conique, le théorème général existe toujours, mais les cercles adjoints qui figurent dans ce théorème se réduisent à des points, et le cercle orthogonal devient le cercle qui passe par ces points. Si en particulier le point *f* coïncide avec le centre *o* de la conique, on voit que :

Théorème. — Un triangle *abc* étant conjugué à une conique :

1° La somme des carrés de ses demi-axes principaux est égale à la puissance de son centre par rapport au cercle circonscrit au triangle ;

2° Si l'on fait passer un cercle par les pieds des perpendiculaires abaissées du centre de la conique sur les côtés du triangle *abc*, la somme des carrés des valeurs

inverses des demi-axes de la conique est égale à l'inverse de la puissance de son centre par rapport à ce cercle;

3° Le produit des carrés des demi-axes principaux de la conique est égal à quatre fois le produit des aires des triangles qui ont pour sommet commun le centre de la conique et ceux du triangle donné, divisé par l'aire de ce triangle.

Nota. — Les aires des triangles qui ont pour sommet commun le centre de la conique doivent être pris avec des signes tels, que leur somme donne l'aire du triangle *abc*.

5. La Géométrie dans l'espace donne lieu à des théorèmes analogues aux précédents.

Théorème général. — Deux tétraèdres *abcd*, *a'b'c'd'* sont polaires réciproques par rapport à une surface du second degré qui a pour centre le point *o* :

1° On construit, par rapport à un point quelconque *f* et à son plan polaire F, les sphères adjointes aux systèmes de points correspondants *aa'*, *bb'*, *cc'*, *dd'* et la sphère orthogonale à ces quatre sphères; si l'on désigne par α, β, γ les demi-axes principaux de la surface, par *g* le pied de la perpendiculaire abaissée du point *f* sur son plan polaire F, on a

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \overline{of}^2 - \frac{\overline{fg}^2}{I_f}\frac{\pi_f}{\pi_g},$$

π_f, π_g étant les puissances des points *f* et *g* par rapport à la sphère orthogonale, I_f l'indice du point *f* par rapport à la surface;

2° Construisons, par rapport au point *f*, les sphères adjointes aux systèmes de plans correspondants AA', BB', CC', DD' et la sphère orthogonale à ces sphères, on a

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = \frac{I_f}{\overline{fg}^2}\left(1 - \frac{\pi_g}{\pi_f}\right),$$

π_f, π_g étant les puissances des points f et g par rapport à cette nouvelle sphère orthogonale;

3° Si l'on désigne par V et V' les volumes des tétraèdres polaires abc, $a'b'c'$, on a

$$x^2\beta^2\gamma^2 I_f^4 = 36\,VV'\,\frac{(f,A)(f,B)(f,C)(f,D)}{(a,A)(b,B)(c,C)(d,D)}\,\frac{(f,F)^4}{(a',F)(b',F)(c',F)(d',F)}.$$

Si le point f coïncide avec le centre o de la surface :

Théorème. — Deux tétraèdres $abcd$, $a'b'c'd'$ sont polaires réciproques par rapport à une surface du second degré qui a pour centre le point o :

1° Sur les segments correspondants aa', bb', cc', dd' pris pour diamètres, on décrit des sphères, ainsi que la sphère orthogonale à ces quatre sphères; la somme des carrés des demi-axes principaux de la surface est égale à la puissance de son centre par rapport à cette sphère;

2° Construisons, par rapport au centre o, les sphères adjointes aux systèmes de plans correspondants AA', BB', CC', DD' et la sphère orthogonale à ces quatre sphères; la somme des carrés des valeurs inverses des demi-axes de la surface est égale à l'inverse de la puissance de son centre o par rapport à la sphère orthogonale;

3° Le produit des carrés des demi-axes de la surface est égal à trente-six fois le produit des volumes des tétraèdres polaires, multiplié par le produit des distances du centre de la surface aux faces de l'un des tétraèdres, divisé par le produit des hauteurs de ce même tétraèdre.

Lorsque les tétraèdres $abcd$, $a'b'c'd'$ coïncident, c'est-à-dire lorsque l'un d'eux $abcd$ est conjugué à la surface, le théorème général existe toujours, mais les sphères adjointes qui figurent dans ce théorème se réduisent à des points et la sphère orthogonale devient la sphère qui passe par ces points. Si en particulier le point f coïncide avec le centre o de la surface, on voit que :

Théorème. — Un tétraèdre *abcd* étant conjugué à une surface du second degré :

1° La somme des carrés de ses demi-axes principaux est égale à la puissance de son centre par rapport à la sphère circonscrite au tétraèdre;

2° Si l'on fait passer une sphère par les pieds des perpendiculaires abaissées du centre de la surface sur les faces du tétraèdre *abcd*, la somme des carrés des valeurs inverses des demi-axes de la surface est égale à l'inverse de la puissance de son centre par rapport à cette sphère;

3° Le produit des carrés des demi-axes principaux de la surface est égal à trente-six fois le produit des volumes des quatre tétraèdres qui ont pour sommet commun le centre de la surface et ceux du tétraèdre donné, divisé par le carré du volume de ce tétraèdre.

Nota. — Les volumes des tétraèdres qui ont pour sommet commun le centre de la surface doivent être pris avec des signes tels, que leur somme donne le volume du tétraèdre *abcd* pris avec le signe —.

Remarque. — Je démontre ces théorèmes par la Géométrie à l'aide de la théorie des indices.

CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1872.

Solution de la question de Mathématiques;

PAR M. CROSNIER.

On donne deux droites Δ *et* Δ' *qui ne se rencontrent pas; par ces droites on fait passer des surfaces* S *du second ordre, pour lesquelles la somme des carrés des longueurs algébriques des axes ainsi que le produit de*

ces longueurs sont des quantités constantes et données :

1° *Trouver le lieu des centres des surfaces* S;

2° *Considérant une quelconque de ces surfaces et le centre* I, *on mène par ce point* I *une droite rencontrant en* D *et* D′ *les deux droites fixes ; on demande de calculer* DD′;

3° *Par les points* D *et* D′ *on mène des plans respectivement perpendiculaires aux droites* Δ *et* Δ′; *on demande le lieu des intersections de ces plans.*

Il est facile de démontrer que le lieu demandé est le lieu des points milieux de deux droites de grandeurs données qui glissent sur deux droites non situées dans un même plan.

En effet, soient I le centre de l'une des surfaces S et DID′ la droite menée par ce point et qui rencontre les droites Δ et Δ′. Cette ligne est un diamètre de la surface; par suite, le point I en est le milieu : il est donc sur le plan parallèle aux deux droites données et qui en est équidistant. J'appelle P ce plan qui contient le lieu demandé. Les génératrices de la surface qui passent en D et D′ sont respectivement parallèles; d'où il suit que les plans tangents en D et D′ sont parallèles au plan P, qui est, par conséquent, le plan conjugué de la droite DD′, et la section de la surface par ce plan a ses asymptotes parallèles aux droites Δ et Δ′. Les diverses courbes que l'on obtient de la sorte sont semblables, puisque leurs asymptotes sont parallèles. Appelons a et b les axes de l'une, et soit $2p$ la plus courte distance des droites Δ et Δ′; le parallélépipède construit sur un système de diamètres conjugués a un volume constant. D'après les données, abp est donc constant; et comme a et b varient proportionnellement, ces quantités sont elles-mêmes constantes.

En second lieu, a, b et ID forment un système de dia-

mètres conjugués. La somme algébrique des carrés a^2, b^2, $\overline{\mathrm{ID}}^2$ est donc égale à la somme des carrés des axes, et, comme cette somme est donnée et égale à m^2, on a

$$a^2 - b^2 + \overline{\mathrm{ID}}^2 = m^2,$$

ou

$$b^2 - a^2 + \overline{\mathrm{ID}}^2 = m^2;$$

d'où, pour ID, deux valeurs constantes. La proposition est donc démontrée.

Il est évident que le lieu des milieux d'une droite de longueur constante qui glisse sur deux droites qui ne se rencontrent pas est une ellipse; car sa projection sur le plan P est de longueur constante. C'est, en effet, le second côté de l'angle droit d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse et l'autre côté sont constants. Les axes de l'ellipse sont les bissectrices des angles des projections des droites Δ et Δ' sur le plan P.

La première et la deuxième partie du problème sont donc résolues; il nous reste à résoudre la troisième.

Les plans menés par les points D et D' et respectivement perpendiculaires aux droites Δ et Δ' sont perpendiculaires au plan P; leur intersection engendre donc un cylindre perpendiculaire à ce plan, et il reste à en trouver la trace. Cette trace se compose de deux cercles.

En effet, soient Od et Od' les projections des droites Δ et Δ' sur le plan P, dd' la projection de DD'. Si dl et $d'l$ sont les perpendiculaires en d et d' aux droites Od et Od', l sera le point du lieu qui correspond à la position DD' de la droite mobile. Mais les quatre points Odld' sont sur un cercle de rayon constant dont Ol est le diamètre; le point l est par conséquent à une distance constante du point O.

Note. — Une autre solution nous a été adressée par M. H. V.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.
(ANNÉE 1872.)

Composition de Mathématiques.

On donne deux axes de coordonnées rectangulaires et deux droites (A) et (B) respectivement parallèles aux axes, et l'on demande :

1° De former l'équation générale des courbes du second degré qui ont pour centre l'origine des coordonnées et qui admettent comme normales les droites données (A) et (B);

2° De démontrer que, par un point du plan, il passe en général trois de ces courbes, à savoir deux ellipses et une hyperbole;

3° De faire connaître les points du plan pour lesquels cette règle générale souffre une exception.

Composition de Géométrie descriptive.

Trouver l'intersection d'une sphère et d'un cylindre de révolution définis de la manière suivante :

La sphère à 10 centimètres de rayon; elle est tangente aux deux plans de projection.

Le cylindre a 7 centimètres de rayon; son axe passe par le point le plus haut de la sphère, est parallèle au plan vertical et fait un angle de 45 degrés avec le plan horizontal.

On indiquera les constructions employées pour obtenir un point quelconque de l'intersection et la tangente en ce point. On représentera le solide commun au cylindre et à la sphère.

Composition de Trigonométrie.

Étant donnés dans un triangle ABC les côtés, savoir :

$$a = 14418^{m},58,$$
$$b = 28381^{m},14,$$
$$c = 35218^{m},76,$$

trouver les trois angles.

Solution de la question de Mathématiques;

PAR M. X***.

Soient Ox, Oy les axes de coordonnées (*); ASB, CSD les droites données parallèles aux axes; $OS = l$.

Soient M et N les points où l'une des coniques rencontre normalement les droites données AB, CD. Par ces points, menons MT et NT parallèles aux axes, ces droites seront tangentes à la conique; MN sera la polaire du point T : elle sera donc partagée en ω en deux parties égales par le diamètre OT; la figure MTNS étant un rectangle, la ligne $T\omega$ ou TO sera la seconde diagonale, et passera par le point S.

Cela posé, le pôle T se mouvant le long de OS, le rectangle MSNT reste semblable à lui-même, et MN a une direction fixe. Prenons pour axe des x' la droite OT, et pour axe des y' la parallèle à la direction fixe MN : Ox' et Oy' seront un système de diamètres conjugués pour toutes les coniques satisfaisant à la question, car la polaire MN est conjuguée du diamètre Ox' qui passe par le pôle.

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

Prenons $OT = \rho$ pour variable, et appelons a et b les demi-diamètres conjugués, suivant les axes, de la conique qui passe en M et N; l'angle droit MTN étant circonscrit à la conique, on a

$$(1) \qquad \rho^2 = \overline{OT}^2 = a^2 + b^2.$$

On sait, en outre, que a est moyen proportionnel entre OT et $O\omega$, ou entre ρ et $\frac{\rho + l}{2}$; donc

$$(2) \qquad a^2 = \rho \frac{\rho + l}{2}.$$

Des équations (1) et (2), on tire

$$b^2 = \rho \frac{\rho - l}{2},$$

et l'équation de la conique

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

s'écrit

$$\frac{x^2}{\rho(\rho + l)} + \frac{y^2}{\rho(\rho - l)} = \frac{1}{2},$$

ou, si l'on veut,

$$(3) \qquad \frac{x^2}{\rho + l} + \frac{y^2}{\rho - l} - \frac{\rho}{2} = 0.$$

Si l'on donne successivement à ρ les valeurs

$$-\infty, \quad -l \mp \varepsilon, \quad +l \mp \varepsilon, \quad +\infty,$$

ε étant très-petit, on reconnaît que le premier membre de l'équation (3) prend les signes

$$+, \quad -+, \quad -+, \quad -;$$

ce qui met en évidence l'existence de trois racines réelles, ρ étant considéré comme une inconnue et x, y comme des quantités données. Donc, par un point (x, y) passent trois coniques : une ellipse, pour la valeur de ρ comprise entre $-\infty$ et $-l$; une hyperbole, pour la valeur de ρ comprise entre $-l$ et $+l$; une ellipse, pour la valeur de ρ comprise entre $+l$ et $+\infty$. L'hyperbole se réduit à deux droites, lorsque $\rho = 0$; ce qui a lieu pour $x = \pm y$.

Il n'y a d'exception à cette règle que si l'on a

1° $$x = 0 \quad \text{ou} \quad y = 0,$$

2° $$l = 0.$$

Dans le premier cas, les points exceptionnels sont situés sur les droites Ox' et Oy'; si l'on suppose, par exemple, $x = 0$, l'équation (3) se partage en deux autres

$$2y^2 = \rho(\rho - l), \quad \rho = -l,$$

ou

$$\rho^2 - l\rho - 2y^2 = 0, \quad \rho = \frac{l}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4} + 2y^2}:$$

l'une des valeurs de ρ est positive et supérieure à l, et l'autre est négative. A la racine positive correspond une ellipse; à la racine négative correspond une ellipse, l'axe des y', ou une hyperbole, selon que l'on a

$$l + \frac{l}{2} - \sqrt{\frac{l^2}{4} + 2y^2} \lesseqgtr 0.$$

Cette inégalité peut être remplacée par la suivante

$$l \lesseqgtr \text{val. abs. de } y.$$

La conique, qui semble avoir disparu, correspond à $\rho = -l$; elle se réduit à la droite $x = 0$.

Dans le second cas, l'équation (3) devient

$$x^2 + y^2 = \frac{\rho^2}{2};$$

mais cette solution ne doit pas être regardée comme répondant *a priori* à la question, la droite OS disparaissant alors ou plutôt devenant indéterminée. Comme, dans le cas où $l = 0$, la solution de la question est évidente, nous ne nous y arrêterons pas.

On pourrait faire diverses remarques intéressantes au sujet de l'équation (3). Nous nous bornerons à observer que, après l'évanouissement des dénominateurs, cette équation est du troisième degré en ρ, mais ne contient pas de terme en ρ^2; la somme des racines y est donc nulle, et, par suite, les trois valeurs de ρ, correspondant à un point donné du plan, fournissent trois pôles T : l'un T_1 entre S et x', l'autre T_2 entre S et son symétrique; quant au troisième T_3, sa construction est facile et se déduit de la relation

$$OT_1 \pm OT_2 = OT_3,$$

lorsque T_1 et T_2 sont connus. Cette remarque facilite l'épure relative à la construction des trois coniques qui passent par un point donné du plan.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 899

(voir 2 série, t. VIII, p. 45);

PAR M. H. BROCARD.

Deux disques situés dans le même plan et ayant la forme d'ellipses égales sont mobiles chacun autour d'un

de leurs foyers supposé fixe; ces disques restent constamment tangents l'un à l'autre. On demande le lieu décrit par le point de contact. (DAUPLAY.)

Soient M le point de contact des deux ellipses dans une certaine position; O, F les foyers fixes; O', F' les seconds foyers; d la distance OF.

Rapportons la première ellipse à son foyer O et à la droite OF; son équation sera

$$(1)\qquad \rho = \frac{p}{1 - e\cos(\omega - \alpha)},$$

α étant l'angle O'OF.

De même, si l'on prend F pour pôle et la direction FO pour axe polaire, la seconde ellipse aura pour équation

$$(2)\qquad \rho' = \frac{p}{1 - e\cos(\omega' - \alpha')},$$

α' étant alors l'angle F'FO.

Le triangle OMF donne la relation

$$(3)\qquad \rho'^2 = \rho^2 + d^2 - 2d\rho\cos\omega;$$

ainsi

$$(4)\qquad \sqrt{\rho^2 + d^2 - 2d\rho\cos\omega} = \frac{p}{1 - e\cos(\omega' - \alpha')}.$$

Cette relation exprime que le point M appartient aux deux ellipses. Il faut, en outre, exprimer qu'elles ont même tangente en ce point. Il suffit pour cela d'écrire

$$V + V' = \pi - (\omega + \omega');$$

donc

$$(5)\qquad \tang(V + V') = -\tang(\omega + \omega').$$

Mais, si l'on projette F en K sur OM, on a

$$\operatorname{tang}(\omega + \omega') = \frac{d \sin\omega}{d \cos\omega - \rho}.$$

D'ailleurs

$$\operatorname{tang} V = \frac{-p}{\sqrt{e^2\rho^2 - (\rho - p)^2}}$$

et

$$\operatorname{tang} V' = \frac{-p}{\sqrt{e^2\rho'^2 - (\rho' - p)^2}}.$$

L'équation (5) devient donc

$$\frac{\operatorname{tang} V + \operatorname{tang} V'}{1 - \operatorname{tang} V \operatorname{tang} V'} + \frac{d \sin\omega}{d \cos\omega - \rho} = 0$$

ou

$$\frac{-p\left(\dfrac{1}{\sqrt{e^2\rho^2 - (\rho - p)^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{e^2\rho'^2 - (\rho' - p)^2}}\right)}{1 - \dfrac{p^2}{\sqrt{[e^2\rho^2 - (\rho - p)^2][e^2\rho'^2 - (\rho' - p)^2]}}} + \frac{d \sin\omega}{d \cos\omega - \rho} = 0.$$

Il n'y a plus qu'à réduire et à remplacer ρ' par sa valeur tirée de (3).

La courbe représentée par cette équation admet le point milieu de OF pour centre et deux axes de symétrie rectangulaires, savoir : OF et la perpendiculaire à OF par le centre indiqué.

En admettant uniquement le contact extérieur des deux ellipses, la courbe n'existe que si l'on a

$$d < 2(a + c) \quad \text{ou} \quad d < \frac{2p}{1 - e}.$$

Question 925

(voir 2e série, t. VIII, p. 143);

PAR M. O. CALLANDREAU,
Candidat à l'École Polytechnique.

Démontrer qu'en développant, suivant les puissances ascendantes de λ, la quantité

$$(1)\qquad \frac{x + \frac{\lambda}{1} + \frac{\lambda^2}{1.2}x + \cdots}{1 + \frac{\lambda}{1}x + \frac{\lambda^2}{1.2} + \cdots} = \frac{e^{\lambda}(1+x) - e^{-\lambda}(1-x)}{e^{\lambda}(1+x) + e^{-\lambda}(1-x)},$$

le coefficient de λ^n est un polynôme L_n du $n^{ième}$ degré en x contenant le facteur $x^2 - 1$, et que l'équation

$$(2)\qquad \frac{L_n}{x^2-1} = 0$$

a toutes ses racines réelles, inégales et comprises entre -1 et $+1$. (CH. HERMITE.)

On aura le coefficient L_n de λ^n en différentiant n fois la fraction (1), et faisant dans le résultat $\lambda = 0$.

Si l'on désigne par φ le dénominateur de la fraction (1), considéré comme fonction de λ, φ' sera le numérateur, φ'' sera égal à φ, φ''' à φ',.... Il faut donc trouver les dérivées successives par rapport à λ de

$$\frac{\varphi'}{\varphi}.$$

La dérivée première est

$$\frac{\varphi\varphi'' - \varphi'^2}{\varphi^2},$$

ou, d'après ce qui a été dit,

$$1 - \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2.$$

Sans aller plus loin, on voit que toutes les dérivées seront des fonctions entières de $\frac{\varphi'}{\varphi}$ d'un degré égal à leur ordre augmenté d'une unité; on voit qu'elles contiendront toutes le facteur

$$1 - \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2,$$

puisque la dérivée de $\frac{\varphi'}{\varphi}$ est $1 - \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2$, et que les dérivées sont des fonctions entières de $\frac{\varphi'}{\varphi}$.

Il faut maintenant faire dans ces dérivées $\lambda = 0$. Or, si l'on fait $\lambda = 0$, $\frac{\varphi'}{\varphi}$ est égal à x; les coefficients L_n seront donc des fonctions entières de x contenant $1 - x^2$ en facteur.

On formera un coefficient quelconque par la loi suivante

$$X_{n+1} = X'_n(1 - x^2) - 2xX_n,$$

les X étant les coefficients L débarrassés du facteur $1 - x^2$.

X_{n+1} est donc la dérivée du polynôme $X_n(1 - x)^2$, et si ce dernier a toutes ses racines réelles, inégales, comprises entre -1 et $+1$, il en est de même de X_{n+1}; or les premiers polynômes sont dans ce cas; donc, etc.

Note. — La même question a été résolue par M. H. Brocard.

Question 974

(voir 2e série, t. VIII, p. 563);

PAR M. OCTAVE ESPANET,

Élève du lycée de Nîmes.

On donne une courbe gauche résultant de l'intersection de deux surfaces du second degré ayant mêmes

plans de symétrie; par deux points pris sur cette courbe, on mène les plans normaux. Les milieux des trois segments, interceptés sur chacun des axes de symétrie entre les deux plans normaux et le point milieu de la corde qui joint les deux points de la courbe, sont dans un plan, et ce plan est perpendiculaire à la corde.

(LAGUERRE.)

Soient les équations des deux surfaces rapportées à leurs plans de symétrie communs

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1 = 0,$$
$$A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 - 1 = 0;$$

soient deux points M et N pris sur la courbe d'intersection de ces deux surfaces, et soient x, y, z, x', y', z' leurs coordonnées; nous aurons les relations

$$(1) \qquad Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1 = 0,$$
$$(2) \qquad A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 - 1 = 0,$$
$$(3) \qquad Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 - 1 = 0,$$
$$(4) \qquad A'x'^2 + B'y'^2 + C'z'^2 - 1 = 0.$$

Les équations de la tangente à la courbe au point M étant

$$AxX + ByY + CzZ - 1 = 0,$$
$$A'xX + B'yY + C'zZ - 1 = 0,$$

l'équation du plan normal, c'est-à-dire du plan perpendiculaire à la tangente en M, sera

$$(BC' - CB')yz(X - x) + (CA' - AC')zx(Y - y) + (AB' - BA')xy(Z - z) = 0.$$

Il est bien facile d'avoir les segments compris sur les axes entre l'origine et ce plan; on trouve ainsi les lon-

gueurs

$$x\,\frac{BC'-CB'+CA'-AC'+AB'-BA'}{BC'-CB'}$$

sur l'axe des x,

$$y\,\frac{BC'-CB'+CA'-AC'+AB'-BA'}{CA'-AC'}$$

sur l'axe des y,

$$z\,\frac{BC'-CB'+CA'-AC'+AB'-BA'}{AB'-BA'}$$

sur l'axe des z.

Les segments correspondants pour le plan normal au point N s'obtiendront en remplaçant, dans ces valeurs, x par x', y par y', z par z'.

Les distances comprises entre l'origine et les milieux des trois segments considérés auront alors pour valeurs

$$a=\frac{x+x'}{2}\,\frac{BC'-CB'+CA'-AC'+AB'-BA'}{BC'-CB'},$$

$$b=\frac{y+y'}{2}\,\frac{BC'-CB'+CA'-AC'+AB'-BA'}{CA'-AC'},$$

$$c=\frac{z+z'}{2}\,\frac{BC'-CB'+CA'-AC'+AB'-BA'}{AB'-BA'}.$$

L'équation du plan passant par ces trois points sera donc

$$\frac{X}{a}+\frac{Y}{b}+\frac{Z}{c}-1=0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{X(BC'-CB')}{x+x'}+\frac{Y(CA'-AC')}{y+y'}+\frac{Z(AB'-BA')}{z-z'}$$
$$=\frac{BC'-CB'+CA'-AC'+AB'-BA'}{2};$$

on peut l'écrire encore

$$\left(X - \frac{x+x'}{2}\right)(BC' - CB')(y+y')(z+z')$$
$$+\left(Y - \frac{y+y'}{2}\right)(CA' - AC')(z+z')(x+x')$$
$$+\left(Z - \frac{z+z'}{2}\right)(AB' - BA')(x+x')(y+y') = 0,$$

et sous cette forme on voit que le plan passe par le milieu de la corde MN.

Il reste à faire voir que ce plan est perpendiculaire à la corde MN, dont les équations sont

$$\frac{X-x}{x-x'} = \frac{Y-y}{y-y'} = \frac{Z-z}{z-z'}.$$

Les conditions pour que le plan

$$mx + ny + pz + q = 0$$

et la droite

$$x = az + r,$$
$$y = bz + s$$

soient perpendiculaires sont que

$$\frac{m}{a} = \frac{n}{b} = \frac{p}{1}.$$

Les égalités à vérifier ici, pour démontrer le théorème en question, sont donc

$$\frac{(BC' - CB')(y+y')(z+z')}{x-x'} = \frac{(CA' - AC')(z+z')(x+x')}{y-y'}$$
$$= \frac{(AB' - BA')(x+x')(y+y')}{z-z'}.$$

Je dis que ces égalités ont lieu. En effet, reprenons les égalités qui expriment que les points M et N sont sur la

courbe donnée. En retranchant l'équation (3) de l'équation (1), on a

$$(5)\quad A(x+x')(x-x')+B(y+y')(y-y')+C(z+z')(z-z')=0;$$

en retranchant l'équation (4) de l'équation (2), on a

$$(6)\quad A'(x+x')(x-x')+B'(y+y')(y-y')+C'(z+z')(z-z')=0.$$

Multiplions l'équation (5) par A', l'équation (6) par A, et retranchons, il vient

$$(AB'-BA')(y+y')(y-y')=(CA'-AC')(z+z')(z-z'),$$

d'où l'on déduit, en multipliant les deux membres par $\dfrac{x+x'}{(y-y')(z-z')}$,

$$\frac{(AB'-BA')(x+x')(y+y')}{z-z'}=\frac{(CA'-AC')(z+z')(x+x')}{y-y'}.$$

On démontrerait de même, en multipliant l'équation (5) par B' et l'équation (6) par B, que l'on a

$$\frac{(AB'-BA')(x+x')(y+y')}{z-z'}=\frac{(BC'-CB')(y+y')(z+z')}{x-x'}.$$

Il est donc démontré que le plan considéré est perpendiculaire sur la corde MN.

Question 1030

(voir 2e série, t. X, p. 385);

PAR M. YLLIAC DE GOÏSEL.

Étant pris trois diamètres conjugués d'une surface du second degré, si l'on projette chacun d'eux sur une droite perpendiculaire au plan des deux autres, la somme des valeurs inverses des carrés de ces projections est constante. (H. FAURE.)

La projection d'un des diamètres conjugués sur une

droite perpendiculaire au plan des deux autres n'est autre chose que la hauteur du parallélépipède construit sur les trois diamètres conjugués, hauteur relative au plan des deux autres diamètres.

Au lieu de considérer les diamètres, considérons leurs moitiés, et démontrons le théorème pour ces moitiés. Désignons les demi-axes par a, b, c, et par les numéros 1, 2, 3 les demi-diamètres conjugués considérés, en appelant A l'aire du parallélogramme construit sur (1, 2), A′ l'aire du parallélogramme construit sur (1, 3) et A″ l'aire du parallélogramme construit sur (2, 3). Désignons d'ailleurs par h, h', h'' les hauteurs des parallélépipèdes qui, ayant respectivement pour bases A, A′, A″, auraient pour troisième arête le demi-diamètre conjugué du plan de la base.

D'après un des théorèmes d'Apollonius, on a

$$\mathrm{A}h = \mathrm{A}'h' = \mathrm{A}''h'' = abc,$$

d'où

$$\frac{1}{h^2} = \frac{\mathrm{A}^2}{a^2b^2c^2}, \quad \frac{1}{h'^2} = \frac{\mathrm{A}'^2}{a^2b^2c^2}, \quad \frac{1}{h''^2} = \frac{\mathrm{A}''^2}{a^2b^2c^2}.$$

Ajoutons ces trois égalités membre à membre, il vient

$$\frac{1}{h^2} + \frac{1}{h'^2} + \frac{1}{h''^2} = \frac{\mathrm{A}^2 + \mathrm{A}'^2 + \mathrm{A}''^2}{a^2b^2c^2}.$$

Mais on sait que la somme des carrés des aires des parallélogrammes construits sur trois diamètres conjugués est constante; donc

$$\mathrm{A}^2 + \mathrm{A}'^2 + \mathrm{A}''^2 = \text{const.} = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2;$$

donc

$$\frac{1}{h^2} + \frac{1}{h'^2} + \frac{1}{h''^2} = \frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{a^2b^2c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Ainsi le théorème est démontré.

Note. — La même question a été résolue par MM. Genty, ingénieur des Ponts et Chaussées; V. Hioux, professeur à Saint-Étienne; Pellissier, capitaine d'artillerie; Moret-Blanc, professeur au lycée du Havre; E. Magenc, élève du lycée de Lille.

Question 1051

(voir 2e série, t. X, p. 558);

PAR M. DOUCET.

Si l'on désigne par $2p$ *le périmètre d'un triangle, par* r *le rayon du cercle inscrit, et par* R *le rayon du cercle circonscrit :* 1° *l'équation du troisième degré*

$$(1)\qquad x^3-(4R+r)x^2+p^2x-p^2r=0$$

a ses trois racines réelles et positives ; 2° *entre* R, r *et* p, *on a*

$$(4R+r)^2 \geqq 3p^2 \geqq 9r(4R+r).$$

(P.-A.-G. COLOMBIER.)

En posant

$$x=\frac{pr}{p-y},$$

on obtient l'équation

$$(2)\qquad y^3-2py^2+[p^2+r(4R+r)]y-4pRr=0,$$

qui, évidemment, a pour racines les côtés du triangle. La réalité des racines de l'équation (2) entraîne celle des racines de l'équation (1). Ces dernières représentent les rayons des trois cercles exinscrits au triangle.

Les conditions formulées (2°), entre R, r et p, s'obtiennent en exprimant que les équations dérivées de (1) et de (2) ont leurs racines réelles.

En effet, ces équations dérivées sont

$$3x^2-2(4R+r)x+p^2=0,$$
$$3y^2-4py+p^2+r(4R+r)=0;$$

la première donne

$$(4R + r)^2 \geqq 3p^2,$$

et la seconde

$$p^2 \geqq 3r(4R + r).$$

On a ainsi

$$(4R + r)^2 \geqq 3p^2 \geqq 9r(4R + r).$$

Question 1054

(voir 2e série, t. X, p. 558);

PAR M. A. PELLISSIER,
Capitaine d'Artillerie.

Par un point P, *on mène à un cercle* C *une sécante* PMN : *trouver le lieu géométrique de l'intersection de deux circonférences passant, l'une par les points* P *et* N, *l'autre par les points* P *et* M, *et toutes deux tangentes à la circonférence* C. (CALLANDREAU.)

Soient O et O′ les centres des deux circonférences tangentes aux points M, N au cercle C, et Q le second point d'intersection de ces circonférences.

Les droites CMO, PO′ sont parallèles, puisque les circonférences O′ et C sont tangentes au point N; et, de même, les droites O′CN et PO sont parallèles. Donc le quadrilatère OPCO′ est un parallélogramme, et la diagonale PC est divisée en deux parties égales, au point R, par la diagonale OO′. D'un autre côté, OO′ est perpendiculaire au milieu de PQ, corde commune aux deux circonférences O, O′; donc QR = RP = RC; par conséquent, le lieu géométrique du point Q est la circonférence décrite du point R comme centre avec $\frac{1}{2}$ PC pour rayon.

Note. — Cette question a été résolue par MM. C. Le Paige, étudiant à Liége; Droiteau, élève du lycée de Moulins; Magenc, du lycée de Lille; Léon Lecornu, du lycée de Caen; Bertillon, du lycée du Havre; Dautheville, Gambey, Lez et Brocard.

Question 1056

(voir 2e série, t. XI, p. 48);

PAR M. MORET-BLANC,
Professeur au lycée du Havre.

Soit une fonction $f(x)$ quelconque, finie et continue dans l'intervalle de a à x. Insérons, entre a et x, $(n-1)$ moyens géométriques $a\sqrt[n]{\frac{x}{a}}$, $a\sqrt[n]{\left(\frac{x}{a}\right)^2}, \ldots$, $a\sqrt[n]{\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}}$, et désignons par M$g$ *la moyenne arithmétique des valeurs*

$$f(a),\quad f\left(a\sqrt[n]{\frac{x}{a}}\right), \ldots,\quad f\left[a\sqrt[n]{\left(\frac{x}{a}\right)^{n-1}}\right],\quad f(x).$$

D'un autre côté, insérons $(n-1)$ moyens arithmétiques $a+\frac{x-a}{n}$, $a+2\frac{(x-a)}{n}, \ldots$, $a+(n-1)\frac{(x-a)}{n}$, entre a et x, et désignons par Ma *la moyenne arithmétique des valeurs*

$$\frac{f(a)}{a},\quad \frac{f\left(a+\frac{x-a}{n}\right)}{a+\frac{x-a}{n}}, \ldots,\quad \frac{f\left[a+(n-1)\frac{(x-a)}{n}\right]}{a+(n-1)\frac{x-a}{n}},\quad \frac{f(x)}{x}.$$

Lorsque n tend vers l'infini, le rapport $\frac{\mathrm{M}a}{\mathrm{M}g}$ tend vers une limite complétement indépendante de la fonction f; cette limite est $\frac{\log\frac{x}{a}}{x-1}$. (F. DIDON.)

Soit d'abord

$$f(x) = x^{m+1},$$

m étant un nombre donné quelconque.

$$Ma = \frac{1}{n+1}\left[a^m + \left(a + \frac{x-a}{n}\right)^m + \ldots + \left(a + n\frac{x-a}{n}\right)^m\right],$$

ou, en développant et désignant par S_p la somme des puissances $p^{\text{ièmes}}$ des n premiers nombres,

$$\begin{aligned} Ma = a^m &+ \frac{m}{1}\,\frac{S_1}{(n+1)n}(x-a) \\ &+ \frac{m(m-1)}{1.2}\,\frac{S_2}{(n+1)n^2}(x-a)^2 + \ldots \\ &+ \frac{m(m-1)\ldots 2.1}{1.2\ldots m}\,\frac{S_m}{(n+1)n^m}. \end{aligned}$$

Or on a

$$\begin{aligned} (p+1)S_p = (n+1)^{p+1} &- \frac{(p+1)p}{1.2}S_{p-1} \\ &- \frac{(p+1)p(p-1)}{1.2.3}S_{p-2} - \ldots \\ &- (p+1)S_1 - (n+1), \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{(p+1)S_p}{(n+1)n^p} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^p - \frac{\frac{(p+1)p}{1.2}S_{p-1} + \ldots + (p+1)S_1 + (n+1)}{(n+1)n^p}.$$

Le numérateur de la dernière fraction est du degré p en n; donc à la limite, pour $n = \infty$, cette fraction s'annule, et l'on a

$$\lim \frac{(p+1)S_p}{(n+1)n^p} = \lim\left(\frac{n+1}{n}\right)^p = 1,$$

d'où

$$\lim \frac{S_p}{(n+1)n^p} = \frac{1}{p+1},$$

et

$$\lim \mathrm{M}a = a^m + \frac{m}{1.2}a^{m-1}(x-a) + \frac{m(m-1)}{1.2.3}a^{m-2}(x-a)^2 + \ldots$$
$$+ \frac{1}{m+1}(x-a)^m.$$

Multipliant les deux membres de cette égalité par $(m+1)(x-a)$, et ajoutant de part et d'autre a^{m+1}, il vient

$$(m+1)(x-a)\lim \mathrm{M}a + a^{m+1}$$
$$= a^{m+1} + \frac{m+1}{1}a^m(x-a) + \frac{(m+1)m}{1.2}a^{m-1}(x-a)^2 + \ldots + (x-a)^{m+1}$$
$$= [a + (x-a)]^{m+1} = x^{m+1},$$

d'où

$$\lim \mathrm{M}a = \frac{x^{m+1} - a^{m+1}}{(m+1)(x-a)}.$$

D'autre part

$$\mathrm{M}g = \frac{1}{n+1}\left[a^{m+1} + a^{m+1}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{m+1}{n}} + a^{m+1}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2(m+1)}{n}} + \ldots + x^{m+1}\right]$$
$$= \frac{x^{m+1}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{m+1}{n}} - a^{m+1}}{(n+1)\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{m+1}{n}} - 1\right]}.$$

Pour $n = \infty$, le numérateur se réduit à $x^{m+1} - a^{m+1}$; le dénominateur se présente sous la forme indéterminée $\infty \times 0$.

Mais on peut l'écrire

$$\frac{\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{m+1}{n}} - 1}{\frac{1}{n+1}};$$

et, en prenant les dérivées des deux termes par rapport à n, on a

$$\lim \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{m+1}{n}} - 1}{\frac{1}{n+1}} = \lim \frac{-\frac{m+1}{n^2}\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{m+1}{n}} l.\frac{x}{a}}{-\frac{1}{(n+1)^2}}$$

$$= \lim (m+1)\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 l.\frac{x}{a} = (m+1) l.\frac{x}{a}.$$

Donc

$$\lim \mathrm{M}g = \frac{x^{m+1} - a^{m+1}}{(m+1) l.\frac{x}{a}},$$

et, par suite,

$$\lim \frac{\mathrm{M}a}{\mathrm{M}g} = \frac{l.\frac{x}{a}}{x - a},$$

le logarithme étant pris dans le système népérien. Cette limite est indépendante de m.

Si l'on prenait $f(x) = \mathrm{A}x^{m+1}$, cette hypothèse ne ferait qu'introduire le facteur A dans chaque terme du rapport $\frac{\mathrm{M}a}{\mathrm{M}g}$, ce qui ne changerait rien à ce rapport.

Le théorème s'applique donc à toute fonction de la forme $\mathrm{A}x^{m+1}$, quelles que soient les constantes A et m, et, par conséquent, à toute somme algébrique de termes de cette forme, puisque, dans toute suite de rapports égaux, la somme algébrique des numérateurs divisée par celle des dénominateurs donne un rapport égal à chacun des rapports proposés.

Ce théorème est donc démontré pour tout polynôme en x, et en général pour toute fonction de x susceptible d'être développée en série ordonnée suivant les puissances de la variable, et convergente pour les valeurs

de cette variable comprises entre les deux limites données.

Note. — Cette question a aussi été résolue par M. Al. Strnad, élève de l'École Polytechnique de Prague, et par M. N. Androusski, étudiant à l'Université de Varsovie.

Question 1071

(voir 2ᵉ série, t. XI, p. 144);

PAR M. GAMBEY.

Les deux circonférences, menées par les foyers d'une conique et qui touchent une tangente de cette conique, se coupent toujours sous le même angle.

(H. FAURE.)

Les équations de la conique et des deux cercles étant

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0,$$
$$x^2+y^2-2\beta y-c^2=0,$$
$$x^2+y^2-2\beta' y-c^2=0,$$

les conditions pour que la droite

$$y=mx+n$$

soit tangente commune à ces courbes sont

$$(1)\qquad \begin{cases} n^2=a^2m^2+b^2,\\ m^2\beta^2+2\beta n+c^2(m^2+1)-n^2=0,\\ m^2\beta'^2+2\beta' n+c^2(m^2+1)-n^2=0. \end{cases}$$

Mais, si V est l'angle des rayons aboutissant au foyer, on a

$$(2)\qquad \operatorname{tang} V=\frac{c(\beta'-\beta)}{c^2+\beta\beta'}.$$

Or, des relations (1) on tire

$$\beta + \beta' = -\frac{2n}{m^2},$$

$$\beta\beta' = \frac{c^2(m^2+1) - n^2}{m^2},$$

d'où l'on déduit facilement

$$\beta' - \beta = \frac{2b(1+m^2)}{m^2}.$$

Substituant dans l'équation (2) les valeurs de $\beta' - \beta$ et de $\beta\beta'$, effectuant les calculs, réduisant, et tenant compte de la première des relations (1), il vient

$$\operatorname{tang} V = \frac{2bc}{c^2 - b^2},$$

quantité indépendante des paramètres variables β et β', m et n.

Note du Rédacteur. — MM. Louis Morel, Pellissier, Brocard, Moret-Blanc et Léon Lecornu ont trouvé de même, au moyen de différents calculs, la formule $\operatorname{tang} V = \frac{2bc}{c^2 - b^2}$, qui montre que l'angle sous lequel se coupent les deux circonférences dont il s'agit est égal à celui que forment les deux rayons vecteurs menés de l'un des foyers de l'ellipse aux extrémités du petit axe de cette courbe.

C'est aussi ce qui résulte de quelques propriétés géométriques que nous allons indiquer.

Soient A'A, B'B les deux axes $2a$, $2b$ de l'ellipse; O le centre, F, F' les foyers de la courbe; C, C' les centres de deux circonférences passant par les foyers et qui touchent une tangente menée à l'ellipse en un point quelconque D; et M le point d'intersection de cette tangente et du grand axe A'A prolongé.

1° Les points t, t', où la tangente quelconque MD coupe les deux tangentes fixes menées à l'ellipse par les extrémités B, B' du petit axe, sont précisément les points auxquels les circonférences C, C' touchent la tangente MD.

Pour le démontrer, il suffit de faire voir que $MF \times MF' = \overline{Mt}^2$. Or, si l'on abaisse des foyers F, F' des perpendiculaires FP, F'P' sur la tan-

gente MD, et du point t une perpendiculaire tH sur le grand axe A′AM, on aura d'abord

$$FP \times F'P' = \overline{tH}^2,$$

puisque le produit des distances des foyers à une tangente quelconque est égal au carré b^2 de la moitié du petit axe. Mais les triangles rectangles FPM, F′P′M, tHM étant semblables, leurs hypoténuses MF, MF′, Mt sont proportionnelles aux côtés FP, FP′, tH des angles droits ; donc

$$MF \times MF' = \overline{Mt}^2.$$

2° L'angle tFt' des droites menées d'un foyer aux points de contact t, t' est invariable et égal à l'angle BFM du rayon vecteur FB et du grand axe.

En effet, on sait que la droite Ft menée d'un foyer au point de concours de deux tangentes tB, tD est bissectrice de l'angle BFD des rayons vecteurs FB, FD conduits aux points de contact; donc

$$tFD = \frac{1}{2}\,BFD \quad \text{et} \quad t'FD = \frac{1}{2}\,B'FD;$$

d'où, par addition,

$$tFt' = \frac{1}{2}(BFD + B'FD) = \frac{1}{2}(BFM + B'FM) = BFM.$$

On a de même

$$tF't' = BF'M.$$

3° La somme des angles FtF′, Ft'F′, sous lesquels la distance focale FF est vue des deux points de contact t, t', est aussi une quantité constante égale à l'angle FBF′.

Car

$$FtF' = tFM - tF'M \quad \text{et} \quad Ft'F' = t'FM - t'F'M;$$

il s'en suit

$$FtF' + Ft'F' = tFt' - tF't' = BFM - BF'M = FBF'.$$

4° Les deux circonférences C, C′ se coupent sous un angle CFC′ invariable, et égal à l'angle BFB′.

Car CFC′ $= 2^d - (C'CF + CC'F)$; mais les angles C′CF, CC′F, aux centres des cercles C, C′, sont respectivement égaux aux angles inscrits FtF′, Ft'F′; donc

$$CFC' = 2^d - (FtF' + Ft'F') = 2^d - FBF' = BFB'.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer. (G.)

Question 1082

(voir 2ᵉ série, t. XI, p. 240) ;

PAR M. MORET-BLANC,
Professeur au lycée du Havre.

Montrer que, pour toutes les valeurs entières et positives des trois quantités m, n, p (en supposant, bien entendu, $p > m+n$), la suite terminée

$$\begin{aligned} &m(m+1)(m+2)\ldots(m+n)\\ &\quad+(m+1)(m+2)(m+3)\ldots(m+n+1)\\ &\quad+(m+2)(m+3)(m+4)\ldots(m+n+2)\\ &\quad+(m+3)(m+4)(m+5)\ldots(m+n+3)\\ &\quad+\ldots+(p-n)(p-n+1)(p-n+2)\ldots(p-2)(p-1)p \end{aligned}$$

a pour valeur

$$\frac{(p+1)p(p-1)\ldots(p-n)-(m+n)(m+n-1)\ldots m(m-1)}{n+2}.$$

(HATON DE LA GOUPILLIÈRE.)

Je représenterai, pour abréger, la première expression par Σ_p. Son identité avec la seconde se vérifie immédiatement pour $p=m+n$, quels que soient les nombres entiers positifs m et n. Il suffit donc de prouver que, si cette identité a lieu pour une valeur de p, elle subsiste encore quand on augmente p d'une unité, c'est-à-dire que, si l'on a

$$\Sigma_p=\frac{(p+1)p(p-1)\ldots(p-n)-(m+n)(m+n-1)\ldots m(m-1)}{n+2},$$

on aura encore

$$\Sigma_{p+1}=\frac{(p+2)(p+1)p\ldots(p-n+1)-(m+n)(m+n-1)\ldots m(m-1)}{n+2}.$$

Or

$$\sum_{p+1} = \sum_{p} + (p-n+1)(p-n+2)\ldots(p-1)p(p+1)$$

$$= \frac{(p+1)p\ldots(p-n+1)(p-n+n+2) - (m+n)(m+n-1)\ldots(m-1)}{n+2}$$

$$= \frac{(p+2)(p+1)\ldots(p-n+1) - (m+n)(m+n-1)\ldots(m-1)}{n+2},$$

C. Q. F. D.

Note. — La même question a été résolue par M. Ant. Jeràbek, étudiant à l'Université de Prague.

CORRESPONDANCE.

M. *Harkema*, de *Saint-Pétersbourg*, nous communique la proposition suivante :

Si, sur les côtés AB, BC, CA *d'un triangle* ABC, *on prend respectivement trois points* M, N, P, *de façon que*

$$\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{MB}} = \frac{m}{n}, \quad \frac{\mathrm{BN}}{\mathrm{NC}} = \frac{n}{p}, \quad \frac{\mathrm{CP}}{\mathrm{PA}} = \frac{p}{q},$$

m, n, p désignant des constantes quelconques, et que l'on mène les droites AN, BP, CQ, *on obtiendra généralement un triangle* $\alpha\beta\gamma$ *résultant des intersections de ces droites, tel que son aire* Δ' *sera liée à l'aire* Δ *du triangle* ABC *par la formule*

$$\Delta' = \Delta \frac{n^2 p^2 (m-q)^2}{(mn+mp+np)(mp+np+nq)(np+nq+pq)}.$$

M. *Harkema* établit cette formule et en déduit, comme cas particuliers, plusieurs propositions connues en Géométrie élémentaire.

M. *Niewenglowski*, agrégé, remarque que, « dans la plupart des *Traités d'Algèbre*, la théorie des *maxima* et *minima* dépendant des équations du second degré présente une lacune », en ce que « l'on ne voit pas bien comment les maxima ou minima, trouvés en écrivant que la variable doit être réelle, satisfont à la définition du maximum ou du minimum. » Pour combler cette lacune, M. Niewenglowski démontre la proposition que voici :

« Soient x une variable croissant par degrés continus, et y une grandeur liée à x par une équation de la forme

$$(1) \qquad x = A \pm B\sqrt{ay^2 + by + c},$$

A, B pouvant être des fractions rationnelles renfermant y. Si, pour $x = \alpha$, une des valeurs correspondantes de y est 6, et que cette valeur de y soit un maximum, par exemple, je dis que 6 sera une des racines de l'équation

$$(2) \qquad ay^2 + by + c = 0. \text{ »}$$

QUESTIONS.

1092. On a deux cercles dans un même plan, le premier est parcouru d'un mouvement uniforme par un point M, et le second est parcouru en sens inverse et d'un mouvement uniforme par un point m, la droite élevée à chaque instant par le milieu de la corde Mm perpendiculairement à cette corde enveloppe une conique; construire cette conique.

Trouver la propriété analogue dans l'espace.

(Laguerre.)

1093. Un tétraèdre *abcd* étant conjugué à un paraboloïde, si l'on désigne par a', b', c' les points où les

arêtes da, db, dc coupent le paraboloïde, on a

$$\left(\frac{da'}{aa'}\right)^2 + \left(\frac{db'}{bb'}\right)^2 + \left(\frac{dc'}{cc'}\right)^2 = 1.$$

(H. Faure.)

1094. Démontrer que, si deux coniques de grandeur fixe ont un foyer commun F, et si l'une d'elles tourne autour de ce foyer dans son plan, le lieu des points de concours des tangentes communes à ces deux coniques est un cercle. Si les deux coniques sont telles que, dans une de leurs positions, les tangentes communes soient parallèles, elles le seront dans toutes : montrer que la condition de parallélisme de ces tangentes communes est l'égalité des axes non focaux. (E. Lemoine.)

1095. Le minimum d'une tangente à l'ellipse, comprise entre les axes, est égal à la demi-somme $(a+b)$ des axes.

1096. Le maximum de la distance du point de contact d'une tangente à l'ellipse à la projection du centre sur cette tangente est égal à la demi-différence $(a-b)$ des axes (*).

1097. Joignons deux points quelconques E, F d'une circonférence à un point O pris arbitrairement sur le prolongement d'un rayon CA de cette circonférence. Désignons par E', F' les points de rencontre de ces droites avec la circonférence. Élevons aux points E, F des droites respectivement perpendiculaires à EO, FO ; appelons I le point de rencontre de ces perpendiculaires. On demande

(*) Les énoncés des questions 1095, 1096 sont extraits de l'ouvrage intitulé : *An elementary Treatise on the differential Calculus containing the theory of plane curves with numerous examples*, by Benjamin Williamson A. M., fellow and tutor, Trinity College, Dublin ; 1872.

de démontrer que l'angle IOC a pour mesure la demi-différence des arcs E'A, F'A. (MANNHEIM.)

1098. La différence entre $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ et e est comprise entre $\frac{e}{2m+1}$ et $\frac{e}{2m+2}$, quel que soit m.

1099. Sur chacun des côtés d'un quadrilatère circonscriptible, on construit deux triangles équilatéraux. Soient α, β, γ, δ les centres des triangles extérieurs; α', β', γ', δ' les centres des triangles intérieurs.

1° Les médianes des deux quadrilatères $\alpha\beta\gamma\delta$, $\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ se coupent en un même point qui est leur milieu.

2° Les médianes du quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$ se coupent à angle droit.

3° Dans le cas du triangle, un des sommets du quadrilatère donné devient le point de contact de l'un des côtés du triangle avec le cercle inscrit.

Les deux propriétés précédentes subsistent.

(H. BROCARD.)

1100. De toutes les ellipses inscrites dans un triangle donné ABC, celle dont la surface est la plus grande est équivalente au cercle inscrit dans un triangle équilatéral équivalent au triangle proposé.

Si du centre de cette ellipse on mène des droites aux centres des cercles inscrits dans les deux triangles équilatéraux construits sur l'un quelconque des trois côtés du triangle proposé, ces droites seront respectivement égales à la demi-somme et à la demi-différence des axes de l'ellipse, et les axes de l'ellipse seront dirigés suivant les bissectrices des angles formés par ces deux droites.

(G.)

ÉTUDE D'UN COMPLEXE DU SECOND ORDRE

(suite, voir même tome, p. 289);

PAR M. PAINVIN.

§ III.

Résumé relatif à la situation des droites réelles du complexe.

25. Les propriétés caractéristiques que nous avons signalées dans les paragraphes précédents permettent de se faire une idée fort nette de la situation des droites réelles du complexe. Pour cela, nous imaginerons un plan Π dans une situation déterminée, puis nous supposerons que le sommet P du cône complexe se déplace dans ce plan.

Il faut d'abord observer que la remarque du n° 13 nous conduit à cette proposition :

THÉORÈME X. — *La conique* (Γ), *correspondant à un plan* Π, *touche en quatre points (réels ou imaginaires) la section de la surface* Δ *par ce plan. Un cône* (C), *ayant son sommet en un point quelconque, a quatre de ses génératrices (réelles ou imaginaires) touchant la surface* Δ.

En effet, il y a dans un plan Π quatre droites d intersection des deux plans d'un système du complexe; or une droite d est la réunion de deux tangentes à la conique (Γ), et elle vient toucher la conique au point où elle touche la surface Δ; donc.... Maintenant, par un point P, passent quatre de ces droites d, qui sont des tangentes à Δ (théorème IV, n° 11), et sont évidemment des droites du complexe; donc....

26. Nous avons à examiner les cas suivants :

1° *Le plan* Π *est extérieur à la surface* Δ.

Lorsque le sommet du cône se déplace dans le plan Π, le cône du complexe enveloppe le cône circonscrit à l'ellipsoïde donné, ayant son sommet en P; les génératrices du cône du complexe devant pénétrer entre les deux nappes de la surface Δ, il n'y aura aucune génératrice réelle de ces cônes dans le plan Π, c'est-à-dire qu'il n'y aura dans ce plan aucune droite réelle du complexe; la conique (Γ) correspondante est donc une *ellipse imaginaire*.

2° *Le plan* Π *touche la nappe supérieure de* Δ.

Soient C le point de contact et I le pied de la perpendiculaire abaissée du centre O de l'ellipsoïde donné sur le plan Π; la conique (Γ) se réduit à *deux points imaginaires,* qui sont les intersections imaginaires de la droite CI avec la nappe inférieure de Δ; I est le milieu du segment déterminé par ces deux points. Lorsque le sommet P du cône du complexe se déplace dans le plan Π, aucune génératrice réelle du cône ne devra se trouver dans ce plan, puisqu'elles doivent passer entre les deux nappes de Δ; il n'y aura d'exception que pour le cas où le sommet P vient en C. Le cône du complexe se réduit alors à deux plans réels dont l'arête, située dans le plan tangent Π et devant toucher la conique (Γ), se confond avec la droite CI. Toutes les droites du complexe, qui passent par le point C, sont situées dans l'un ou l'autre des deux plans du système, lesquels plans sont tangents à la nappe inférieure de Δ.

3° *Le plan* Π *coupe la nappe supérieure de* Δ *sans rencontrer la nappe inférieure.*

Soit δ_1 l'intersection du plan avec la nappe supérieure de Δ; la courbe δ_1 est fermée. La conique (Γ) est réelle

et est une *hyperbole* extérieure à la courbe δ_1; car, si une des branches de cette hyperbole pénétrait dans δ_1, il y aurait une portion d'arc de cette courbe des points duquel on ne pourrait pas mener de tangente à l'hyperbole; or cela est inadmissible, puisque, pour les différents points de cet arc, le cône du complexe se réduit à un système de plans réels qui seront toujours coupés suivant des droites réelles par le plan Π, et ces droites réelles devraient toucher l'hyperbole. Le centre I de cette hyperbole sera le pied de la perpendiculaire abaissée du centre de l'ellipsoïde sur le plan Π.

Lorsque le sommet P du cône du complexe se trouvera dans l'intérieur de l'hyperbole (Γ), il n'y aura pas de droites réelles dans le plan Π; quand le point se trouvera sur l'hyperbole, le cône du complexe touchera le plan Π suivant la tangente en P à l'hyperbole; lorsqu'il sera à l'extérieur de la conique, le cône sera coupé par le plan Π suivant deux génératrices réelles qui seront tangentes à la conique, et ces deux génératrices deviendront les asymptotes quand le point P viendra coïncider avec le point I.

Lorsque le sommet se trouve sur la courbe δ_1, le cône du complexe se réduit à deux plans réels dont l'arête n'est pas dans le plan Π, sauf pour les points où la courbe δ_1 vient toucher l'hyperbole (Γ).

4° *Le plan* Π *touche la nappe inférieure de* Δ.

Soient toujours δ_1 l'intersection du plan Π avec la nappe supérieure de Δ, C son point de contact avec la nappe inférieure, et I le pied de la perpendiculaire abaissée du centre O de l'ellipsoïde sur ce plan; la conique (Γ) se réduit ici à deux points réels, a et a', qui sont les intersections de la droite CI avec la nappe supérieure de Δ; I est le milieu du segment aa'.

Lorsque le sommet P a une situation quelconque dans le plan Π, le cône du complexe est coupé par le plan Π suivant deux droites réelles passant respectivement par a et a'; quand le sommet est en C, le cône se réduit à deux plans imaginaires, dont l'arête réelle, située dans le plan tangent Π, coïncide nécessairement avec la droite aa'.

Quand le point P se trouve sur la courbe δ_1, le cône du complexe se réduit à deux plans réels dont les intersections par le plan Π passent toujours par les points a et a'. Si le sommet du cône se déplace sur aa', le cône est touché par le plan Π suivant l'arête aa'; lorsqu'il se trouve en a ou a', le cône se réduit à deux plans réels dont l'arête, située dans le plan Π, touche la courbe δ_1 en a ou a'.

5° *Le plan* Π *coupe les deux nappes de la surface* Δ.

Soient δ_1 et δ_0 les intersections du plan Π avec les nappes supérieure et inférieure de Δ; comme il y a dans ce plan des droites réelles du complexe, puisque les points de δ_1 donnent lieu à des plans réels, il en résulte que la conique (Γ) est réelle; comme elle est une ellipse, cette ellipse est donc réelle. Ajoutons que cette ellipse est extérieure à la courbe δ_0 et intérieure à la courbe δ_1. En effet, si le sommet du cône est sur la courbe δ_1, on a deux plans réels dont les intersections par le plan Π doivent toucher la conique Γ; si le sommet P est dans l'intérieur de δ_0, le cône du complexe est imaginaire, propriétés qui impliquent nécessairement la position que nous avons assignée à l'ellipse Γ.

Lorsque le sommet P du cône est en dehors de δ_1, ou situé entre δ_1 et (Γ), le cône du complexe est réel et coupé suivant deux droites réelles par le plan Π; si ce sommet se trouve entre (Γ) et δ_0, le cône est réel, mais

il n'a plus de droites réelles situées dans le plan Π; enfin, quand le sommet est dans l'intérieur de δ_0, le cône est imaginaire.

Lorsque le sommet est sur δ_0, le cône se réduit à deux plans imaginaires dont l'arête traverse le plan Π, excepté pour les points, tels que d_0, où la conique (Γ) touche la courbe δ_0; pour ces points, le cône du complexe se réduit à deux plans imaginaires, dont l'arête, située dans le plan Π, touche en d_0 la courbe δ_0, et rencontre la courbe δ_1 en deux points a_1 et a'_1, qui seront les sommets de la conique, réduite à deux points, correspondant au plan tangent à Δ en d_0.

Quand le sommet se déplace sur la conique (Γ), le cône du complexe est tangent au plan Π suivant la tangente à la conique au point où se trouve le sommet.

Enfin, lorsque le sommet du cône est sur δ_1, le cône se réduit à deux plans réels, dont les intersections par le plan Π touchent la conique; si le sommet vient à coïncider avec un des points, tels que a_1, les deux plans sont toujours distincts, leur arête n'est pas située dans le plan Π, et ils sont coupés par ce plan suivant deux droites, dont l'une est $a_1 a'_1$. Quand le sommet se trouve en un des points où la conique (Γ) touche la courbe δ_1, les deux plans du système ont leur arête dans le plan Π; cette arête est la tangente commune en ce point à la conique et à la courbe δ_1.

§ IV.

27. Nous allons revenir maintenant sur certaines propriétés plus particulières que nous avons laissées de côté dans cette première étude, et sur la démonstration analytique de plusieurs propositions énoncées dans les paragraphes précédents. Ces démonstrations analytiques ont

l'avantage de mettre en évidence les relations qui lient les éléments correspondants, et peuvent être utiles dans d'autres recherches.

Les points a, a', auxquels se réduit la conique (Γ), *quand le plan auquel elle correspond est tangent à la surface* Δ, *se trouvent sur cette même surface* Δ (nº **24**).

Le plan (u_0, v_0, w_0) étant tangent à la surface Δ, on a, nº **21**,

$$(1^\circ) \qquad N = 0, \quad \text{ou} \quad \mathcal{S}_0\mathcal{G}_0 - e\mathcal{S}_0 - \mathcal{H}_0 = 0;$$

les équations (41), (42 *bis*) et (43 *bis*) du nº **19** donnent alors

$$(2^\circ) \qquad \rho^2 = \frac{M}{\mathcal{S}_0}, \quad k = M, \quad M = \mathcal{S}_0\mathcal{G}_0 - 1.$$

On a d'ailleurs, nºs **19** et **21**,

$$(49) \qquad \left\{\begin{aligned} \mathcal{S}_0 &= u_0^2 + v_0^2 + w_0^2, \\ \mathcal{G}_0 &= \mathrm{BC}u_0^2 + \mathrm{CA}v_0^2 + \mathrm{AB}w_0^2, \\ \mathcal{H}_0 + 1 &= a^2u_0^2 + b^2v_0^2 + c^2w_0^2; \end{aligned}\right.$$

$$(49\ bis) \qquad \mathcal{S}_0\mathcal{G}_0 - e\mathcal{S}_0 - \mathcal{H}_0 = 0.$$

Les équations (49), résolues par rapport à u_0, v_0, w_0, donnent, eu égard à (49 *bis*),

$$(50) \qquad \left\{\begin{aligned} b_1^2c_1^2u_0^2 &= (\mathrm{A}\mathcal{S}_0 - 1)(\mathcal{G}_0 - \mathrm{A}), \\ c_1^2a_1^2v_0^2 &= (\mathrm{B}\mathcal{S}_0 - 1)(\mathcal{G}_0 - \mathrm{B}), \\ a_1^2b_1^2w_0^2 &= (\mathrm{C}\mathcal{S}_0 - 1)(\mathcal{G}_0 - \mathrm{C}); \end{aligned}\right.$$

les équations (50) *définissent les coordonnées* u_0, v_0, w_0 *d'un plan quelconque, tangent à la surface* Δ, *en fonction des quantités* $\mathcal{S}_0$, $\mathcal{G}_0$, *qu'on peut regarder comme arbitraires.*

Pour obtenir les coordonnées x, y, z des points a et a', remarquons que, si l'on abaisse du centre O de l'ellipsoïde une perpendiculaire sur le plan u_0, v_0, w_0, le

pied I de cette perpendiculaire, dont les coordonnées sont $\frac{u_0}{\mathcal{S}_0}$, $\frac{v_0}{\mathcal{S}_0}$, $\frac{w_0}{\mathcal{S}_0}$, sera le centre de la conique (a, a'), et la longueur $\mathrm{I}a$ sera précisément égale à ρ. Par conséquent, si α, β, γ sont les angles de $\mathrm{I}a$ avec les axes, on aura

$$(3^\circ)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{u_0}{\mathcal{S}_0} + \rho\cos\alpha, \\ y &= \frac{v_0}{\mathcal{S}_0} + \rho\cos\beta, \qquad \text{où} \quad \rho^2 = \frac{\mathcal{S}_0\mathcal{G}_0 - 1}{\mathcal{S}_0}. \\ z &= \frac{w_0}{\mathcal{S}_0} + \rho\cos\gamma, \end{aligned}\right.$$

Mais les angles α, β, γ sont donnés par les égalités (44), n° 20; en introduisant dans ces égalités la valeur actuelle de k, $k = \mathcal{S}_0\mathcal{G}_0 - 1$, elles deviennent

$$\frac{\cos\alpha(\mathrm{A}\mathcal{S}_0 - 1)}{u_0} = \frac{\cos\beta(\mathrm{B}\mathcal{S}_0 - 1)}{v_0} = \frac{\cos\gamma(\mathrm{C}\mathcal{S}_0 - 1)}{w_0} = \mu.$$

On devra avoir

$$\frac{1}{\mu^2} = \frac{u_0^2}{(\mathrm{A}\mathcal{S}_0 - 1)^2} + \frac{v_0^2}{(\mathrm{B}\mathcal{S}_0 - 1)^2} + \frac{w_0^2}{(\mathrm{C}\mathcal{S}_0 - 1)^2},$$

ce qui donne, en ayant égard aux valeurs (50),

$$(4^\circ)\qquad \mu^2\rho^2\mathcal{S}_0^2 = -(\mathrm{A}\mathcal{S}_0 - 1)(\mathrm{B}\mathcal{S}_0 - 1)(\mathrm{C}\mathcal{S}_0 - 1).$$

Par conséquent :

Les coordonnées x, y, z des points a, a', auxquels se réduit la conique (Γ) correspondant au plan tangent (u_0, v_0, w_0), seront données par les équations

$$(51)\quad (a, a')\quad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{u_0}{\mathcal{S}_0} + \frac{u_0}{\mathcal{S}_0}\,\frac{\varepsilon}{\mathrm{A}\mathcal{S}_0 - 1}, \\ y &= \frac{v_0}{\mathcal{S}_0} + \frac{v_0}{\mathcal{S}_0}\,\frac{\varepsilon}{\mathrm{B}\mathcal{S}_0 - 1}, \\ z &= \frac{w_0}{\mathcal{S}_0} + \frac{w_0}{\mathcal{S}_0}\,\frac{\varepsilon}{\mathrm{C}\mathcal{S}_0 - 1}, \end{aligned}\right.$$

où

$$\varepsilon^2 = -(A\delta_0 - 1)(B\delta_0 - 1)(C\delta_0 - 1).$$

Pour démontrer que ces points sont situés sur la surface Δ, n° 8, nous allons calculer les expressions

$$\begin{aligned} S &= x^2 + y^2 + z^2 - e, \\ G &= Ax^2 + By^2 + Cz^2 - g, \\ H &= b^2c^2x^2 + c^2a^2y^2 + a^2b^2z^2 - g. \end{aligned}$$

Dans ce but, faisons d'abord les carrés de x, y, z; on a

$$(51\ bis)\quad \left\{ \begin{aligned} \delta_0^2 x^2 &= \frac{\mathcal{G}_0 - A}{b_1^2 c_1^2}(-BC\delta_0^2 + 2e\delta_0 - 2 + 2\varepsilon), \\ \delta_0^2 y^2 &= \frac{\mathcal{G}_0 - B}{c_1^2 a_1^2}(-CA\delta_0^2 + 2e\delta_0 - 2 + 2\varepsilon), \\ \delta_0^2 z^2 &= \frac{\mathcal{G}_0 - C}{a_1^2 b_1^2}(-AB\delta_0^2 + 2e\delta_0 - 2 + 2\varepsilon). \end{aligned} \right.$$

On trouve alors immédiatement, en ayant égard aux relations (28), n° 13,

$$\begin{aligned} S &= \mathcal{G}_0 - e, \\ G\delta_0^2 &= 2e\delta_0 - g\delta_0^2 - 2 + 2\varepsilon, \\ H\delta_0^2 &= -(2e\delta_0 - g\delta_0^2 - 2)(\mathcal{G}_0 - e) - 2\varepsilon(\mathcal{G}_0 - e); \end{aligned}$$

d'où il résulte

$$SG + H = 0,$$

ce qui démontre la proposition en question.

28. *Tout plan tangent à la surface Δ appartient à un des systèmes de plans du complexe.*

Reportons-nous à l'équation (5°) (23) du n° 11; si nous posons

$$\begin{aligned} \theta' &= \sqrt{(a^2 + \rho_1)(b^2 + \rho_1)(c^2 + \rho_1)}, \\ \theta'' &= \sqrt{(a^2 - \rho_1)(b^2 - \rho_1)(c^2 - \rho_1)}, \\ 2\theta &= (\theta' + \theta'')^2, \end{aligned}$$

les coordonnées u_0, v_0, w_0 d'un plan du complexe pourront s'écrire

$$u_0 = \frac{x_0[\theta'(a^2 - \rho_1) + \theta''(a^2 + \rho_1)]}{(\theta' + \theta'')(a^4 - \rho_1^2)}, \ldots,$$

avec

$$x_0^2 = -\frac{(a^4 - \rho_1^2)(a^2 + \rho_2)}{b_1^2 c_1^2}, \ldots,$$

ou, en élevant au carré et réduisant,

$$-b_1^2 c_1^2 u_0^2 \theta = (a^2 + \rho_2)(h - e\rho_1^2 + 2a^2\rho_1^2 + \theta'\theta''), \ldots.$$

Mais il est facile de voir que

$$\theta = h + e\rho_1^2 + \theta'\theta'';$$

par conséquent, *les coordonnées* u_0, v_0, w_0 *des plans du complexe correspondant à un point de la nappe supérieure de* Δ, *défini par les paramètres* ρ_1 *et* ρ_2, *sont données par les équations*

$$(52)\quad \begin{cases} -b_1^2 c_1^2 u_0^2 = (a^2 + \rho_2)\left(1 - 2A\dfrac{\rho_1^2}{\theta}\right), \\ -c_1^2 a_1^2 v_0^2 = (b^2 + \rho_2)\left(1 - 2B\dfrac{\rho_1^2}{\theta}\right), \\ -a_1^2 b_1^2 w_0^2 = (c^2 + \rho_2)\left(1 - 2C\dfrac{\rho_1^2}{\theta}\right), \end{cases}$$

où

$$2\theta = (\theta' + \theta'')^2,$$
$$\theta' = \pm\sqrt{(a^2 + \rho_1)(b^2 + \rho_1)(c^2 + \rho_1)},$$
$$\theta'' = \pm\sqrt{(a^2 - \rho_1)(b^2 - \rho_1)(c^2 - \rho_1)}.$$

Si, à l'aide des valeurs (52), on calcule les expressions

$$\mathfrak{S}_0 = u_0^2 + v_0^2 + w_0^2,$$
$$\mathfrak{G}_0 = BCu_0^2 + CAv_0^2 + ABw_0^2,$$
$$\mathfrak{H}_0 = a^2u_0^2 + b^2v_0^2 + c^2w_0^2 - 1,$$

on trouve

$$(53)\quad \begin{cases} \mathcal{S}_0 = 2\dfrac{\rho_1^2}{\theta}, \\ \mathcal{G}_0 = e + \rho_2, \\ \mathcal{H}_0 = \dfrac{2\rho_2\rho_1^2}{\theta}. \end{cases}$$

De là résulte évidemment

$$\mathcal{S}_0\mathcal{G}_0 - e\mathcal{S}_0 - \mathcal{H}_0 = 0.$$

En rapprochant ces résultats de ceux que donnent les équations (23) (2°), n° 11, on a la proposition suivante :

Si x_0, y_0, z_0 *sont les coordonnées d'un point de la surface* Δ, *aux paramètres* ρ_1 *et* ρ_2; *si* u_0, v_0, w_0 *sont les coordonnées d'un des plans du système correspondant au point* (x_0, y_0, z_0), *on a les valeurs*

$$(54)\quad \begin{cases} S_0 = \rho_2, \qquad G_0 = \rho_1^2, \qquad H_0 = -\rho_2\rho_1^2; \\ \mathcal{S}_0 = \dfrac{2\rho_1^2}{\theta}, \quad \mathcal{G}_0 = e + \rho_2, \quad \mathcal{H}_0 = \dfrac{2\rho_2\rho_1^2}{\theta}; \\ 2\theta = \left[\sqrt{(a^2+\rho_1)(b^2+\rho_1)(c^2+\rho_1)} \pm \sqrt{(a^2-\rho_1)(b^2-\rho_1)(c^2-\rho_1)}\right]^2. \end{cases}$$

Démontrons maintenant que tout plan tangent à Δ est un plan d'un des systèmes du complexe. Il nous suffit d'écrire que les valeurs (50) de u_0, v_0, w_0, qui déterminent un plan tangent à la surface Δ, sont les mêmes que celles que fournissent les équations (52) qui déterminent les plans des systèmes du complexe. On obtient ainsi les égalités

$$(1°)\quad \begin{cases} \rho_2 = \dfrac{(A\mathcal{S}_0 - 1)(\mathcal{G}_0 - A)}{2A\dfrac{\rho_1^2}{\theta} - 1} - a^2 \\ \quad = \dfrac{(B\mathcal{S}_0 - 1)(\mathcal{G}_0 - B)}{2B\dfrac{\rho_1^2}{\theta} - 1} - b^2 \\ \quad = \dfrac{(C\mathcal{S}_0 - 1)(\mathcal{G}_0 - C)}{2C\dfrac{\rho_1^2}{\theta} - 1} - c^2. \end{cases}$$

Ces trois équations, où $\mathfrak{S}_0$ et $\mathfrak{G}_0$ sont des quantités supposées connues, doivent déterminer les deux inconnues ρ_1 et ρ_2.

Or, si l'on fait $\frac{\rho_1^2}{\theta} = \mathfrak{S}_0$, les rapports (1°) deviennent égaux, et l'on a

$$\rho_2 = \mathfrak{G}_0 - e;$$

ce qui prouve la proposition qu'on avait en vue.

De là, ou des relations (54), nous tirons encore la remarque suivante :

Si u_0, v_0, w_0 sont les coordonnées d'un plan tangent à la nappe inférieure de Δ, par exemple, les paramètres ρ_1 et ρ_2 du point (x_0, y_0, z_0) de la nappe supérieure pour lequel ce plan donné est un des plans du système correspondant du complexe sont fournis par les équations

$$(55) \quad \begin{cases} \rho_2 = \mathfrak{G}_0 - e, \\ \rho_1^4 + 2\rho_1^2\left(\dfrac{2}{\mathfrak{S}_0^2} - \dfrac{2e}{\mathfrak{S}_0} + g\right) + g^2 - \dfrac{4h}{\mathfrak{S}_0} = 0. \end{cases}$$

29. La droite d'intersection des deux plans d'un système du complexe est définie par les équations (26), n° **12** :

$$(1°) \quad \begin{cases} x = x_0 + \dfrac{\lambda x_0}{a^2 + \rho_2}, \\ y = y_0 + \dfrac{\lambda y_0}{b^2 + \rho_2}, \\ z = z_0 + \dfrac{\lambda z_0}{c^2 + \rho_2}, \end{cases}$$

λ est une arbitraire; (x_0, y_0, z_0) est le point où cette droite touche la surface Δ; ρ_2 est le paramètre de la surface homofocale à laquelle est normale la droite (d).

Cherchons combien il y a de ces droites dans un plan (u_1, v_1, w_1) arbitrairement donné.

La droite (1°) devant être dans le plan (u_1, v_1, w_1),

c'est-à-dire

$$u_1 x + v_1 y + w_1 z - 1 = 0,$$

on a les deux équations de condition

$$(2^\circ) \quad \begin{cases} u_1 x_0 + v_1 y_0 + w_1 z_0 - 1 = 0, \\ \dfrac{u_1 x_0}{a^2 + \rho_2} + \dfrac{v_1 y_0}{b^2 + \rho_2} + \dfrac{w_1 z_0}{c^2 + \rho_2} = 0. \end{cases}$$

Or les équations (2°) sont vérifiées si l'on pose

$$(56) \quad \begin{cases} u_1 x_0 = -\dfrac{(a^2 + \rho_2)(a^2 - \mu)}{b_1^2 c_1^2}, \\ v_1 y_0 = -\dfrac{(b^2 + \rho_2)(b^2 - \mu)}{c_1^2 a_1^2}, \\ w_1 z_0 = -\dfrac{(c^2 + \rho_2)(c^2 - \mu)}{a_1^2 b_1^2}, \end{cases}$$

et ce seront les valeurs générales, puisqu'elles renferment une constante arbitraire μ.

Mais les coordonnées x_0, y_0, z_0 doivent vérifier les équations (23) (3°), n° 11; en y substituant les valeurs (56) et en isolant le terme en ρ_1^2, il vient

$$(56\ bis) \quad \begin{cases} \rho_1^2 = \dfrac{(a^2 + \rho_2)(a^2 - \mu)^2}{b_1^2 c_1^2} + a^4 \\ = \dfrac{(b^2 + \rho_2)(b^2 - \mu)^2}{c_1^2 a_1^2} + b^4 \\ = \dfrac{(c^2 + \rho_2)(c^2 - \mu)^2}{a_1^2 b_1^2} + c^4. \end{cases}$$

Égalons maintenant ces rapports, et résolvons les égalités par rapport à ρ_2, on trouve

$$(56\ ter) \quad \begin{cases} \rho_2 = \dfrac{b^2 b_1^2 (b^2 - \mu)^2 w_1^2 - c^2 c_1^2 (c^2 - \mu)^2 v_1^2 + A a_1^4 b_1^2 c_1^2 v_1^2 w_1^2}{c_1^2 (c^2 - \mu)^2 v_1^2 - b_1^2 (b^2 - \mu)^2 w_1^2} \\ = \dfrac{c^2 c_1^2 (c^2 - \mu)^2 u_1^2 - a^2 a_1^2 (a^2 - \mu)^2 w_1^2 + B a_1^2 b_1^4 c_1^2 w_1^2 u_1^2}{a_1^2 (a^2 - \mu)^2 w_1^2 - c_1^2 (c^2 - \mu)^2 u_1^2} \\ = \dfrac{a^2 a_1^2 (a^2 - \mu)^2 v_1^2 - b^2 b_1^2 (b^2 - \mu)^2 u_1^2 + C a_1^2 b_1^2 c_1^4 u_1^2 v_1^2}{b_1^2 (b^2 - \mu)^2 u_1^2 - a_1^2 (a^2 - \mu)^2 v_1^2} \end{cases}$$

Enfin, si l'on égale entre eux les derniers rapports, on arrive à l'équation *unique*

$$(56\ \textit{quater})\left\{\begin{array}{l} u_1^2(b^2-\mu)^2(c^2-\mu)^2+v_1^2(c^2-\mu)^2(a^2-\mu)^2 \\ \quad +w_1^2(a^2-\mu)^2(b^2-\mu)^2-\mathrm{A}v_1^2w_1^2a_1^4(a^2-\mu)^2 \\ \quad -\mathrm{B}w_1^2u_1^2b_1^4(b^2-\mu)^2-\mathrm{C}u_1^2v_1^2c_1^4(c^2-\mu)^2=0. \end{array}\right.$$

L'équation (56 *quater*) est du quatrième degré en μ; à une racine μ correspond une seule valeur de ρ_2 fournie par les équations (56 *ter*), puis une seule valeur positive de ρ_1 donnée par les équations (56 *bis*), et enfin une seule valeur des coordonnées x_0, y_0, z_0 du point de contact données par les équations (56). Par conséquent :

Il y a quatre droites (d) situées dans un plan arbitrairement donné (u_1, v_1, w_1).

30. *Cherchons combien il y a de droites (d) passant par un point* (x_1, y_1, z_1) *arbitrairement donné.*

D'après les équations (1°) ci-dessus, on a

$$x_0=\frac{(a^2+\rho_2)x_1}{(a^2+\rho_2+\lambda)},\quad y_0=\frac{(b^2+\rho_2)y_1}{(b^2+\rho_2+\lambda)},\quad z_0=\frac{(c^2+\rho_2)z_1}{(c^2+\rho_2+\lambda)};$$

ou, après avoir posé $\rho_1+\lambda=\nu$,

$$(57)\quad x_0=\frac{(a^2+\rho_2)x_1}{(a^2+\nu)},\quad y_0=\frac{(b^2+\rho_2)y_1}{(b^2+\nu)},\quad z_0=\frac{(c^2+\rho_2)z_1}{(c^2+\nu)}.$$

Substituons ces valeurs dans les équations (3°) (23), n° 11, et dirigeons le calcul comme dans le numéro précédent, nous obtenons successivement

$$(57\ \textit{bis})\left\{\begin{array}{l} \rho_1^2=\dfrac{b_1^2c_1^2(a^2+\rho_2)}{(a^2+\nu)^2}+a^4 \\ \quad =\dfrac{c_1^2a_1^2(b^2+\rho_2)}{(b^2+\nu)^2}+b^4=\dfrac{a_1^2b_1^2(c^2+\rho_2)}{(c^2+\nu)^2}+c^4; \end{array}\right.$$

$$(57\ ter)\quad \left\{\begin{aligned} \rho_2 &= \frac{b^2c_1^2y_1^2(c^2+\nu)^2 - c^2b_1^2z_1^2(b^2+\nu)^2 + \mathrm{A}(b^2+\nu)^2(c^2+\nu)^2}{b_1^2z_1^2(b^2+\nu)^2 - c_1^2y_1^2(c^2+\nu)^2} \\ &= \frac{c^2a_1^2z_1^2(a^2+\nu)^2 - a^2c_1^2x_1^2(c^2+\nu)^2 + \mathrm{B}(c^2+\nu)^2(a^2+\nu)^2}{c_1^2x_1^2(c^2+\nu)^2 - a_1^2z_1^2(a^2+\nu)^2} = \cdots; \end{aligned}\right.$$

$$(57\ quater)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{A}x_1^2(b^2+\nu)^2(c^2+\nu)^2 + \mathrm{B}y_1^2(c^2+\nu)^2(a^2+\nu)^2 \\ &+ \mathrm{C}z_1^2(a^2+\nu)^2(b^2+\nu)^2 - a_1^4y_1^2z_1^2(a^2+\nu)^2 \\ &- b_1^4z_1^2x_1^2(b^2+\nu)^2 - c_1^4x_1^2y_1^2(c^2+\nu)^2 = 0. \end{aligned}\right.$$

D'où l'on conclut comme précédemment que :

Il y a quatre droites (d) *passant par un point* (x_1, y_1, z_1) *arbitrairement choisi.*

31. Voici maintenant les diverses questions particulières que nous étudierons successivement :

1° Cas où le sommet du cône du complexe est à l'infini; cas où le plan des coniques (Γ) passe par le centre de l'ellipsoïde;

2° Lieu des points pour lesquels le cône du complexe est de révolution; position des plans pour lesquels la conique (Γ) se réduit à un cercle;

3° Points pour lesquels le cône du complexe se réduit à deux plans coïncidents; plans pour lesquels la conique (Γ) se réduit à deux points coïncidents.

32. *Cas où le sommet du cône du complexe est à l'infini.*

Reportons-nous à l'équation (4), n° 4; remplaçons-y x_0, y_0, z_0 par $\frac{x_0}{t_0}$, $\frac{y_0}{t_0}$, $\frac{z_0}{t_0}$; puis, après avoir chassé le dénominateur, faisons

$$\frac{x_0}{\cos\alpha} = \frac{y_0}{\cos\beta} = \frac{z_0}{\cos\gamma}, \quad t_0 = 0,$$

α, β, γ étant les angles avec les axes de coordonnées de

la direction des génératrices du cylindre; il vient

$$(y\cos\gamma - z\cos\beta)^2 + (z\cos\alpha - x\cos\gamma)^2 + (x\cos\beta - y\cos\alpha)^2$$
$$= (b^2 + c^2)\cos^2\alpha + (c^2 + a^2)\cos^2\beta + (a^2 + b^2)\cos^2\gamma,$$

ou, en développant,

$$(58)\quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2 \\ \quad = a^2 + b^2 + c^2 - (a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma). \end{cases}$$

On voit que le cône se réduit à un cylindre de révolution circonscrit à la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2 - (a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma).$$

Or, si l'on mène un plan tangent à l'ellipsoïde perpendiculairement à la direction des génératrices du cylindre, ce plan coupe la sphère, lieu des sommets des trièdres trirectangles circonscrits, suivant un cercle qui est précisément le cercle directeur du cylindre (58). Ce résultat se voit d'ailleurs sans calcul, en remarquant que le lieu des intersections des plans rectangulaires tangents à un cylindre du second degré est un cylindre de révolution.

L'enveloppe du cylindre (58) est précisément la surface Δ.

En effet, écrivons α, β, γ au lieu de $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, l'équation (58) peut se mettre sous la forme

$$(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - b^2 - c^2) + a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2$$
$$= (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2,$$

ou, d'après nos notations actuelles,

$$(1^{\circ})\quad \alpha^2(S + a^2) + \beta^2(S + b^2) + \gamma^2(S + c^2) = (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2.$$

Égalons à zéro les dérivées par rapport à α, β, γ, il vient

$$\alpha(S + a^2) = x(\alpha x + \beta y + \gamma z),$$
$$\beta(S + b^2) = y(\alpha x + \beta y + \gamma z),$$
$$\gamma(S + c^2) = z(\alpha x + \beta y + \gamma z);$$

d'où

$$\alpha = \frac{x(\alpha x + \beta y + \gamma z)}{S + a^2},$$

$$\beta = \frac{y(\alpha x + \beta y + \gamma z)}{S + b^2},$$

$$\gamma = \frac{z(\alpha x + \beta y + \gamma z)}{S + c^2}.$$

Substituons ces dernières valeurs dans l'équation (1°), il reste

(59) $$\frac{x^2}{S + a^2} + \frac{y^2}{S + b^2} + \frac{z^2}{S + c^2} - 1 = 0,$$

ce qui est une forme de l'équation de la surface Δ; car, en réduisant, on a

$$S^3 + S^2 e + Sg + h = S^2(S + e) + S(G + g) + H + h,$$

ou

$$SG + H = 0.$$

33. *Cas où le plan* (u_0, v_0, w_0) *passe par le centre de l'ellipsoïde.*

Si, dans l'équation (34), n° 15, on remplace u_0, v_0, w_0 par $\frac{u_0}{r_0}, \frac{v_0}{r_0}, \frac{w_0}{r_0}$, puis qu'on fasse

$$r_0 = 0, \quad \frac{u_0}{\cos\alpha} = \frac{v_0}{\cos\beta} = \frac{w_0}{\cos\gamma},$$

α, β, γ étant les angles de l'axe du plan sécant avec les axes de coordonnées, il vient

(60) $$\left\{\begin{aligned} &(b^2 + c^2)(v\cos\gamma - w\cos\beta)^2 \\ &+ (c^2 + a^2)(w\cos\alpha - u\cos\gamma)^2 \\ &+ (a^2 + b^2)(u\cos\beta - v\cos\alpha)^2 = 1, \end{aligned}\right.$$

ou, en développant,

(60 *bis*) $$\left\{\begin{aligned} &u^2(C\cos^2\beta + B\cos^2\gamma) + v^2(A\cos^2\gamma + C\cos^2\alpha) \\ &\quad + w^2(B\cos^2\alpha + A\cos^2\beta) - 2Avw\cos\beta\cos\gamma \\ &\qquad - 2Buw\cos\gamma\cos\alpha - 2Cuv\cos\alpha\cos\beta = 1. \end{aligned}\right.$$

Si l'on revient aux équations ponctuelles, on trouve que la conique (Γ) est définie par les deux équations

$$(60\ ter)\quad \left\{\begin{array}{l} Ax^2+By^2+Cz^2=BC\cos^2\alpha+CA\cos^2\beta+AB\cos^2\gamma,\\ x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=0.\end{array}\right.$$

Le lieu des points où les coniques (Γ) (60 *ter*) se rencontrent est encore la surface Δ.

En effet, en mettant α, β, γ au lieu de $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$, les équations (60 *ter*) peuvent s'écrire

$$\begin{array}{r}(Ax^2+By^2+Cz^2-BC)\alpha^2+(Ax^2+By^2+Cz^2-CA)\beta^2\\ +(Ax^2+By^2+Cz^2-AB)\gamma^2=0,\end{array}$$

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=0,$$

ou encore

$$(1^\circ)\quad \left\{\begin{array}{l}(G-a^4)x^2+(G-b^4)\beta^2+(G-c^4)\gamma^2=0,\\ \alpha x+\beta y+\gamma z=0.\end{array}\right.$$

En différentiant, on obtient

$$(2^\circ)\qquad \frac{\alpha(G-a^4)}{x}=\frac{\beta(G-b^4)}{y}=\frac{\gamma(G-c^4)}{z}.$$

Substituons ces valeurs de α, β, γ dans la première des équations (1°), on trouve

$$\frac{x^2}{G-a^4}+\frac{y^2}{G-b^4}+\frac{z^2}{G-c^4}=0,$$

ou

$$\begin{array}{l}x^2(Ax^2+By^2+Cz^2-AB)(Ax^2+By^2+Cz^2-AC)\\ +y^2(Ax^2+By^2+Cz^2-BC)(Ax^2+By^2+Cz^2-BA)\\ +z^2(Ax^2+By^2+Cz^2-CA)(Ax^2+By^2+Cz^2-CB)=0,\end{array}$$

équation qui se réduit à celle de la surface Δ, après la suppression du facteur $Ax^2+By^2+Cz^2$.

De là :

Théorème XI. — *Lorsque le sommet du cône du com-*

plexe est à l'infini sur une direction (α, β, γ), *le cône se réduit à un cylindre de révolution, dont le cercle directeur est l'intersection, avec la sphère lieu des sommets des trièdres trirectangles circonscrits à l'ellipsoïde, du plan tangent à l'ellipsoïde mené perpendiculairement à la direction choisie. L'enveloppe de ces cylindres est la surface* Δ.

Lorsque le plan Π *passe par le centre de l'ellipsoïde, la conique* (Γ) *correspondante a pour centre celui de l'ellipsoïde, et est l'intersection du plan* Π *avec un ellipsoïde concentrique et homothétique à l'ellipsoïde* G; *le rapport des carrés des axes du premier à ceux du second est* $\frac{ABC}{g^2}p^2$, p *étant la distance du centre* O *au plan tangent à l'ellipsoïde* G *parallèle au plan* Π. *Le lieu des points de rencontre des coniques* (Γ) *est encore la surface* Δ.

34. Avant d'aborder la seconde question, remarquons que les sections de la surface Δ par les plans principaux de l'ellipsoïde sont

$$(61)\left\{\begin{array}{lll} x = 0, & y = 0, & z = 0, \\ y^2 + z^2 = A, & z^2 + x^2 = B, & x^2 + y^2 = C, \\ By^2 + Cz^2 = BC, & Ax^2 + Cz^2 = AC, & Ax^2 + By^2 = AB. \end{array}\right.$$

Lorsque le plan Π (u_0, v_0, w_0) se confond avec un des plans principaux de l'ellipsoïde, avec le plan zOy par exemple, on a $v_0 = 0$, $w_0 = 0$, $r_0 = 0$, et l'équation (34), n° 15, rendue homogène, devient

$$Cv^2 + Bw^2 = 1 \quad \text{ou} \quad (x = 0, \ By^2 + Cz^2 = BC);$$

la conique (Γ) coïncide avec l'ellipse de la surface Δ située dans le plan yOz.

Lorsque le sommet P est à l'infini sur un des axes de

l'ellipsoïde, sur l'axe Ox par exemple, on a $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, $t_0 = 0$, et l'équation (4), n° 4, rendue homogène, devient

$$y^2 + z^2 = A;$$

le cône est alors un cylindre ayant pour trace le cercle de la surface Δ situé dans le plan principal perpendiculaire à Ox.

Ainsi :

Théorème XII. — *Lorsque le plan* Π *se confond avec un des plans principaux de l'ellipsoïde donné, la conique* (Γ) *coïncide avec l'ellipse de la surface* Δ *située dans le plan principal considéré.*

Lorsque le sommet du cône est à l'infini sur un des axes principaux de l'ellipsoïde donné, le cône du complexe se réduit à un cylindre ayant pour trace le cercle de la surface Δ *situé dans le plan principal perpendiculaire à l'axe considéré.*

35. Pour la recherche qui nous occupe, c'est-à-dire l'étude de la situation des droites réelles du complexe, nous aurons à considérer surtout la section de la surface Δ par le plan xOz.

La section de la surface Δ par le plan xOz se compose des deux courbes

$$(62)\qquad \begin{cases} y = 0, & x^2 + z^2 = B \quad \text{(cercle)}, \\ y = 0, & Ax^2 + Cz^2 = AC \quad \text{(ellipse)}. \end{cases}$$

L'équation de la focale à l'ellipsoïde située dans le plan zOx est

$$(63)\qquad y = 0, \quad a_1^2 x^2 - c_1^2 z^2 = a_1^2 c_1^2 \quad \text{(hyperbole focale)}.$$

Le cercle et l'ellipse (62) se coupent au point (en ne

considérant que celui dont les coordonnées sont positives)

$$(64)\quad (D)\quad x_0 = \frac{c_1\sqrt{C}}{\sqrt{-b_1^2}},\quad y_0 = 0,\quad z_0 = \frac{a_1\sqrt{A}}{\sqrt{-b_1^2}};$$

les tangentes en ce point à l'ellipse, à l'hyperbole focale et au cercle, sont

$$(65)\quad \begin{cases} (T_e)\quad c_1\dfrac{x}{\sqrt{C}} + a_1\dfrac{z}{\sqrt{A}} = \sqrt{-b_1^2} & \text{(tangente à l'ellipse)},\\ (T_h)\quad \sqrt{C}\dfrac{x}{c_1} - \sqrt{A}\dfrac{z}{a_1} = \sqrt{-b_1^2} & \text{(tang. à l'hyp. focale)},\\ (T_c)\quad xc_1\sqrt{C} + za_1\sqrt{A} = B\sqrt{-b_1^2} & \text{(tangente au cercle)}. \end{cases}$$

On voit par là que :

L'hyperbole focale passe par le point de rencontre de l'ellipse et du cercle, et y coupe orthogonalement l'ellipse; l'ellipse de la surface Δ, *l'hyperbole focale et l'ellipse principale de l'ellipsoïde donné, situées dans le plan* zOx, *sont homofocales. L'ellipse et le cercle* (62) *se coupent sous un angle* V *dont la tangente est*

$$\operatorname{tang} V = \frac{a_1 c_1}{\sqrt{AC}}.$$

(*La suite prochainement.*)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 973

(voir 2e série, t. VIII, p. 562);

PAR M. MORET-BLANC,
Professeur au lycée du Havre.

Une parabole se déplace en restant toujours tangente à une droite fixe en un point déterminé. On demande :

1° *le lieu du foyer*; 2° *le lieu du point de la courbe où la tangente est perpendiculaire à la droite fixe*; 3° *l'enveloppe de l'axe de la parabole.* (BROCARD.)

L'équation polaire de la parabole, en prenant le foyer pour pôle et la droite dirigée de ce point vers le sommet pour axe polaire, est

$$r = \frac{p}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}.$$

Je suppose, pour fixer les idées, que l'axe de la parabole étant dirigé horizontalement de gauche à droite, θ soit regardé comme positif ou négatif suivant que le rayon vecteur est au-dessus ou au-dessous de l'axe.

Prenons maintenant pour pôle le point fixe, pour axe polaire la tangente fixe dirigée vers la droite, et appelons ω l'angle que le rayon vecteur mené au foyer de la parabole fait avec le nouvel axe polaire.

1° La propriété de la tangente de faire des angles égaux avec le rayon vecteur du point de contact et une parallèle à l'axe donne, dans tous les cas, en ayant égard au signe de θ,

$$\omega = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}, \quad \text{d'où} \quad \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{2} - \omega.$$

L'équation polaire du lieu des foyers sera donc

$$(1) \qquad r = \frac{p}{2\sin^2\omega},$$

et en coordonnées rectangulaires

$$p^2(x^2+y^2) = 4y^4.$$

Cette courbe est symétrique par rapport aux deux axes des coordonnées; elle se compose de deux branches, convexes vers l'axe des x, ayant pour sommets les points

$x = 0, y = \pm \frac{p}{2}$, et s'étendant à l'infini. Elle n'a pas d'asymptotes.

2° On sait que la corde de contact de deux tangentes rectangulaires passe par le foyer; elle se compose de deux rayons vecteurs correspondant à des valeurs de θ qui diffèrent de π; donc, en appelant M le point de la parabole où la tangente est perpendiculaire à la droite fixe, on a

$$\mathrm{OM} = \rho = \frac{p}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} + \frac{p}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{p}{2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{2p}{\sin^2\theta},$$

$$(2) \qquad \rho = \frac{2p}{\sin^2 2\omega}.$$

La courbe se compose de quatre branches infinies ayant pour sommets les points $\omega = \pm\frac{\pi}{4}$, $\omega = \pm\frac{3\pi}{4}$, $\rho = 2p$. La tangente et la normale fixe, ainsi que les bissectrices de leurs angles, sont quatre axes de symétrie. Il n'y a pas d'asymptote.

En coordonnées rectangulaires, l'équation serait

$$p^2(x^2+y^2)^3 = 4x^4y^4.$$

3° L'équation de la parabole en coordonnées rectangulaires étant

$$y'^2 = 2px',$$

l'équation de l'axe, en prenant pour axes des coordonnées la tangente et la normale, sera

$$\frac{\pm x}{\sqrt{4x'^2+y'^2}} + \frac{y}{\sqrt{y'^2+p^2}} = 1,$$

ou

$$\frac{\pm x}{\sqrt{2x'(2x'+p)}} + \frac{y}{\sqrt{p(2x'+p)}} = 1.$$

Dans le premier terme, il faut prendre le signe + ou le signe — suivant que le sommet de la parabole est situé du côté des abscisses positives ou négatives.

Posons

$$\sqrt{2x'+p}=\alpha,\quad \text{d'où}\quad \sqrt{2x'}=\sqrt{\alpha^2-p}.$$

L'équation devient, en multipliant par $\alpha\sqrt{\alpha^2-p}$,

$$(3)\qquad \pm x+\frac{y}{\sqrt{p}}\sqrt{\alpha^2-p}=\alpha\sqrt{\alpha^2-p}.$$

Prenant la dérivée par rapport au paramètre variable α, on a

$$\frac{\alpha y}{\sqrt{p}\sqrt{\alpha^2-p}}=\sqrt{\alpha^2-p}+\frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2-p}};$$

ou, en multipliant par $\sqrt{\alpha^2-p}$,

$$(4)\qquad \frac{\alpha y}{\sqrt{p}}=2\alpha^2-p.$$

L'équation (3) peut s'écrire

$$\left(\alpha-\frac{y}{\sqrt{p}}\right)\sqrt{\alpha^2-p}=\pm x,$$

d'où, en élevant au carré,

$$(5)\qquad \left(\alpha-\frac{y}{\sqrt{p}}\right)^2(\alpha^2-p)=x^2.$$

En éliminant α entre les équations (4) et (5), on obtiendra l'équation de l'enveloppe de l'axe. On trouve ainsi

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned}&16p^2x^4+(20p^2y^2-y^4+8p^4)x^2\\ &\qquad -y^6-5p^2y^4+5p^4y^2+p^6=0,\end{aligned}\right.$$

d'où

$$x^2=\frac{y^4-20p^2y^2-8p^4\pm y^2\sqrt{y^4+24p^2y^2+704p^4}}{32p^2},$$

Pour $y^2 < p^2$, les deux valeurs de x^2 seraient négatives; pour $y^2 = p^2$, $x^2 = 0$; pour $y^2 > p^2$, les valeurs de x^2 seront de signes contraires; il ne faut donc conserver devant le radical que le signe +

$$x^2 = \frac{y^4 - 20p^2y^2 - 8p^4 + y^2\sqrt{y^4 + 24p^2y^2 + 704p^4}}{32p^2}.$$

La courbe est symétrique par rapport aux deux axes; elle se compose de deux branches s'étendant à l'infini dans les quatre angles des coordonnées, et présente deux points de rebroussement $x = 0, y = \pm p$.

Note. — La même question a été résolue par MM. Augier, du lycée de Lyon; Léon Morizot, du lycée de Besançon; Michel Dieu, répétiteur auxiliaire au lycée de Lyon; O. Callandreau, candidat à l'École Polytechnique; A. Le Helloco, élève du lycée de Bordeaux; Willière, professeur à Arlon; V. Niébylowski, élève de l'École Normale supérieure.

Question 978

(voir 2e série, t. IX, p. 48);

PAR M. FR. CONRADT, à Stuttgard.

Soit une conique ayant pour foyer le point F, *et soit* N *le pied de la perpendiculaire abaissée d'un foyer* F *sur la directrice correspondante; du foyer abaissons les perpendiculaires* FM, FM′ *sur deux tangentes quelconques, et la perpendiculaire* FN′ *sur la corde qui joint les points de contact des tangentes; les quatre points* M, M′, N, N′ *sont sur une même circonférence, et ils partagent cette circonférence harmoniquement.*

(E. LAGUERRE.)

Soient $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ l'équation de la conique donnée, et x', y' les coordonnées du point P, intersection des deux tangentes. On sait que les points M, M′ appar-

tiennent à une circonférence k_1, décrite sur l'axe focal pour diamètre, et dont l'équation est $x^2+y^2-a^2=0$. Mais, les points M, M' appartiennent aussi à la circonférence k_2, décrite sur la droite FP comme diamètre, et qui a pour équation

$$(x-c)(x-x')+y(y-y')=0.$$

Donc l'équation générale des circonférences passant par les points M, M' est

$$(x-c)(x-x')+y(y-y')-\lambda(x^2+y^2-a^2)=0.$$

En disposant de l'indéterminée λ sous la condition que la circonférence passe encore par le point N, on trouve que la circonférence k_3, déterminée par les trois points M, M', N, est représentée par l'équation

$$(1)\quad (cx-a^2)\left(\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}-1\right)-\frac{cx'y'}{a^2b^2}y\left[\frac{(x-c)a^2}{x'}-\frac{b^2y}{y'}\right]=0.$$

Cette dernière équation montre que la circonférence k_3 passe par le point d'intersection des droites

$$(2)\qquad \frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}-1=0,$$

et

$$(3)\qquad \frac{(x-c)a^2}{x'}-\frac{b^2y}{y'}=0,$$

c'est-à-dire par le point N' (*).

Il résulte aussi de la forme de l'équation (1), que la circonférence k_3 passe encore par deux autres points qui sont : 1° le point où la droite FN' rencontre la directrice; 2° le point où la corde des contacts rencontre l'axe focal.

(*) L'équation (2) représente la corde des contacts des tangentes menées à l'ellipse par le point P, et l'équation (3) la perpendiculaire FN' abaissée du foyer F sur cette corde.

Ces deux derniers points limitent évidemment un diamètre de la circonférence k_2.

Il reste à démontrer que les quatre points M, M', N, N' partagent harmoniquement cette circonférence. Et, pour cela, il suffit de faire voir que les tangentes menées à la circonférence par les points N, N', rencontrent en un même point la droite MM'.

Or l'équation de MM', corde commune aux circonférences k_1, k_2, est

(4) $$x(c+x')+yy'-(a^2+cx')=0,$$

et les équations des tangentes menées à la circonférence k_2 aux points N, N' sont

(5) $$\left(x-\frac{a^2}{c}\right)(x'-c)-yy'=0,$$

(6) $$\left\{\begin{aligned}&\left[\frac{x'(x'-c)}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}\right]\left(\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}-1\right)\\&+\frac{cx'y'^2}{a^4b^4}(a^2-cx')\left[\frac{(x-c)a^2}{x'}-\frac{b^2y}{y'}\right]=0.\end{aligned}\right.$$

L'identité

(7) $$\left\{\begin{aligned}&[y'^2+(x'-c)^2][x(x'+c)+yy'-(a^2+cx')]\\&-c^3\left(\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-1\right)\left[\left(x-\frac{a^2}{c}\right)(x'-c)-yy'\right]\\&=a^2b^2\left[\frac{x'(x'-c)}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}\right]\left(\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}-1\right)\\&+\frac{cx'y'^2}{a^2b^2}(a^2-cx')\left[\frac{(x-c)a^2}{x'}-\frac{b^2y}{y'}\right]\end{aligned}\right.$$

vérifie la proposition énoncée (*).

Note. — La même question a été résolue par MM. Hioux, professeur au lycée de Saint-Étienne; Willière, professeur à Arlon; Prosper Pein, professeur au lycée de Saint-Quentin.

(*) En résolvant les équations (4) et $x=\frac{a^2}{c}$, on trouve, par un calcul des plus simples, que la droite MM' coupe la directrice en un point H,

Question 988

(voir 2e série, t. IX, p. 192);

PAR M. H. BROCARD.

Étant donnée une ellipse de Cassini, et étant pris sur cette ellipse deux couples de points diamétralement opposés A, A′ *et* B, B′; *si l'on joint ces quatre points à un point quelconque* M *de la courbe, la différence des angles* A′MA *et* B′MB *est constante.* (E. LAGUERRE.)

Nous traiterons la question d'une manière en quelque sorte indirecte, en cherchant une courbe jouissant de la propriété énoncée.

Prenons donc les quatre points A, A′, B, B′, diamètralement opposés par rapport à une origine O d'axes rectangulaires. Désignons par a, b, $-a$, $-b$, a', b', $-a'$, $-b'$ leurs coordonnées, et soient x, y les coordonnées d'un point M du plan. Nous aurons

Coefficient angulaire de	MA	$\dfrac{y-b}{x-a}$,
»	MA′	$\dfrac{y+b}{x+a}$,
»	MB	$\dfrac{y-b'}{x-a'}$,
»	MB′	$\dfrac{y+b'}{x+a'}$;

---

dont les coordonnées sont $X = \dfrac{a^2}{c}$, $Y = \dfrac{-b^2 x'}{cy'}$, et, en remplaçant X, Y par ces valeurs dans l'équation $Xx + Yy - a^2 = 0$ de la polaire du point H par rapport à la circonférence $x^2 + y^2 - a^2 = 0$, on obtient l'équation (3) de la droite FN′. D'où il faut d'abord conclure que la droite FN′ rencontre MM′ en un point H′ conjugué harmonique de H, par rapport à M, M′; il s'ensuit que, en nommant R le point d'intersection de FN′ et de la directrice, les quatre droites RM, RM′, RH′N′, RHN forment un faisceau harmonique. Or il a été démontré que le point R appartient à la circonférence k_2; donc les points M, M′, N, N′ partagent cette circonférence harmoniquement. (G.)

d'où

$$\operatorname{tang} \text{A}'\text{MA} = 2\,\frac{bx - ay}{x^2 + y^2 - a^2 - b^2} = 2\,\frac{bx - ay}{\rho^2 - c^2},$$

et

$$\operatorname{tang} \text{B}'\text{MB} = 2\,\frac{b'x - a'y}{x^2 + y^2 - a'^2 - b'^2} = 2\,\frac{b'x - a'y}{\rho^2 - c'^2},$$

en posant, pour abréger,

$$x^2 + y^2 = \rho^2, \quad a^2 + b^2 = c^2, \quad a'^2 + b'^2 = c'^2.$$

Mais B'MB — A'MA est constant; donc

$$\operatorname{tang}(\text{B}'\text{MB} - \text{A}'\text{MA}) = \frac{m}{n},$$

$\frac{m}{n}$ désignant une constante. L'équation de la courbe lieu des points M est donc

$$\begin{aligned} 2n[(bx - ay)(\rho^2 - c'^2) - (b'x - a'y)(\rho^2 - c^2)] - m(\rho^2 - c^2)(\rho^2 - c'^2) \\ - 4m(bx - ay)(b'x - a'y) = 0. \end{aligned}$$

Elle représente une ellipse de Cassini admettant l'origine pour centre et les deux axes de coordonnées pour axes de symétrie. Cette courbe passe de plus par les points A, A', B, B'.

Note. — La même question a été résolue par M. Moret-Blanc.

Question 997

(voir 2e série, t. IX, p. 288);

PAR M. O. CALLANDREAU,
Candidat à l'École Polytechnique.

Trouver le lieu des centres des circonférences doublement tangentes à un limaçon de Pascal.

(H. BROCARD.)

J'emploierai pour résoudre cette question les coordonnées polaires; mais, avant de donner la solution, je résoudrai la question préliminaire suivante :

Étant donnée une équation du quatrième degré

(1) $$A_0x^4 + A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x + A_4 = 0,$$

quelles relations doivent exister entre les coefficients pour que l'équation soit un carré parfait?

Il est inutile de donner les calculs; le résultat suffit. On trouve pour l'une des conditions (nous n'aurons pas besoin de l'autre)

(2) $$A_1^2 A_4 = A_3^2 A_0.$$

Voici maintenant la solution du problème proposé:

L'équation du limaçon est, en prenant le point double pour origine,

(3) $$r = a + b\cos\omega;$$

l'équation d'un cercle dont le centre est au point (ξ, η) et dont le rayon est R, est

(4) $$r^2 - 2r(\xi\cos\omega + \eta\sin\omega) + \eta^2 + \xi^2 - R^2 = 0.$$

Je cherche l'équation qui donne les r des points d'intersection des deux courbes (3) et (4). Il me suffit de remplacer dans l'équation (4) $\sin\omega$ par $\sqrt{1 - \cos^2\omega}$, et de remplacer dans la nouvelle équation $\cos\omega$ par sa valeur tirée de l'équation (3), on arrive ainsi à cette équation du quatrième degré en r

$$\left[\left(1 - \frac{2\xi}{b}\right)^2 + \frac{4\eta^2}{b^2}\right] r^4 + \left[4\frac{a}{b}\xi\left(-1\ \frac{2\xi}{b}\right) - 8\frac{\eta^2 a}{b^2}\right] r^3$$
$$+ \left[4\xi^2\frac{a^2}{b^2} + 2\left(1 - \frac{2\xi}{b}\right)(\xi^2 + \eta^2 - R^2) - 4\eta^2 + 4\frac{\eta^2 a^2}{b^2}\right] r^2$$
$$+ 4\frac{a}{b}\xi(\xi^2 + \eta^2 - R^2) r + (\xi^2 + \eta^2 - R^2)^2 = 0.$$

Le cercle étant doublement tangent au limaçon, l'équation doit avoir deux couples de racines doubles, c'est-à-dire que les coefficients doivent être liés par la condi-

tion (2); donc

$$\left[4\frac{a}{b}\xi\left(1-\frac{2\xi}{b}\right)-8\frac{\eta^2 a}{b^2}\right]^2(\xi^2+\eta^2-R^2)^2$$
$$=16\frac{a^2\xi^2}{b^2}(\xi^2+\eta^2-R^2)^2\left[\left(1-\frac{2\xi}{b}\right)^2+4\frac{\eta^2}{b^2}\right],$$

ou

$$\left[\xi\left(1-\frac{2\xi}{b}\right)-2\frac{\eta^2}{b}\right]^2=\xi^2\left[\left(1-\frac{2\xi}{b}\right)^2+4\frac{\eta^2}{b^2}\right],$$

ou

$$\frac{\eta^4}{b^2}-\frac{\eta^2}{b}\xi\left(1-\frac{2\xi}{b}\right)=\frac{\eta^2\xi^2}{b^2};$$

ce qui donne $\eta^2=0$ axe polaire (il était évident qu'il devait faire partie du lieu), et $\xi^2+\eta^2-b\xi=0$ ou $r=b\cos\omega$, cercle décrit sur la distance de l'origine au centre du cercle directeur comme diamètre.

Note. — La même question a été résolue par M. François Ainé, élève du lycée de Lyon.

Question 1005

(voir 2e série, t. IX, p. 432);

PAR M. GENTY,

Ingénieur des Ponts et Chaussées à Sidi-bel-Abbès.

On donne une surface du second degré et une sphère; si l'on désigne par α, β, γ les angles sous lesquels trois plans diamétraux de la surface (ou trois diamètres conjugués) rencontrent la sphère, et par A, B, C *les aires des sections déterminées par ces plans (ou les longueurs des diamètres), on a la relation*

$$A^2\cos^2\alpha+B^2\cos^2\beta+C^2\cos^2\gamma=\text{const.}$$

(H. FAURE.)

On sait qu'on peut représenter les coordonnées d'un point quelconque d'un ellipsoïde par $a\cos\lambda$, $b\cos\mu$, $c\cos\nu$, où λ, μ, ν sont les angles que fait une certaine

droite avec les axes de la surface, en sorte que

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1.$$

Avec cette méthode, les droites qui correspondent à deux diamètres conjugués de la surface sont à angle droit, c'est-à-dire que l'on a

$$\cos\lambda\cos\lambda' + \cos\mu\cos\mu' + \cos\nu\cos\nu' = 0.$$

Ceci posé, soient λ, μ, ν, λ', μ', ν', λ'', μ'', ν'' les angles qui correspondent à trois diamètres conjugués d, d', d'' de la surface, x', y', z' les coordonnées du centre de la sphère, R son rayon, δ la distance du centre au diamètre d, on a

$$\cos^2\alpha = \frac{\delta^2}{R^2}.$$

Or, si θ, θ', θ'' sont les angles que fait le diamètre d avec les axes, on a

$$\delta^2 = (y'\cos\theta'' - z'\cos\theta')^2 + (z'\cos\theta - x'\cos\theta'')^2 + (x'\cos\theta' - y'\cos\theta)^2;$$

d'ailleurs,

$$\cos\theta = \frac{a\cos\lambda}{d},\quad \cos\theta' = \frac{b\cos\mu}{d},\quad \cos\theta'' = \frac{c\cos\nu}{d},$$

donc

$$\delta^2 = \frac{(cy'\cos\nu - bz'\cos\mu)^2 + (az'\cos\lambda - cx'\cos\nu)^2 + (bx'\cos\mu - ay'\cos\lambda)^2}{d^2},$$

donc

$$d^2\cos^2\alpha = \frac{(cy'\cos\nu - bz'\cos\mu)^2 + (az'\cos\lambda - cx'\cos\nu)^2 + (bx'\cos\mu - ay'\cos\lambda)^2}{R^2};$$

de même

$$d'^2\cos^2\beta = \frac{(cy'\cos\nu' - bz'\cos\mu')^2 + (az'\cos\lambda' - cx'\cos\nu')^2 + (bx'\cos\mu' - ay'\cos\lambda')^2}{R^2},$$

$$d''^2\cos^2\gamma = \frac{(cy'\cos\nu'' - bz'\cos\mu'')^2 + (az'\cos\lambda'' - cx'\cos\nu'')^2 + (bx'\cos\mu'' - ay'\cos\lambda'')^2}{R^2},$$

et, par suite,

$$d^2\cos^2\alpha + d'^2\cos^2\beta + d''^2\cos^2\gamma = \frac{x'^2(b^2+c^2) + y'^2(c^2+a^2) + z'^2(a^2+b^2)}{R^2}.$$

On démontrerait aussi simplement que

$$A^2\cos^2\alpha + B^2\cos^2\beta + C^2\cos^2\gamma = \frac{\pi^2}{R^2}(b^2c^2x'^2 + c^2a^2y'^2 + a^2b^2z'^2),$$

A, B et C étant les aires des sections faites dans la surface du second degré par trois plans diamétraux conjugués, et α, β, γ les angles sous lesquels ces plans coupent la sphère donnée.

Question 1040

(voir 2e série, t. X, p. 479);

PAR M. T. DOUCET,

Professeur au lycée de Lyon.

On donne deux surfaces fixes de second ordre; on imagine une droite D *telle que les plans tangents aux points où elle rencontre les deux surfaces se coupent en un même point* M :

1° *Lorsqu'on se donne le point* M, *il y a une droite* D, *et une seule, satisfaisant à la question : elle est l'intersection des plans polaires du point* M *par rapport aux deux surfaces;*

2° *Lorsque le point* M *décrit une droite fixe, la droite* D *décrit une surface du second ordre circonscrite au tétraèdre conjugué par rapport aux deux surfaces;*

3° *Lorsque la droite* D *se meut sur un plan fixe, le point* M *décrit une cubique gauche.*

(L. PAINVIN.)

1° Cette première partie du théorème est évidente. Soient $S=0$, $T=0$ les deux surfaces. La droite des con-

tacts de deux plans tangents menés à S par le point M est située dans le plan polaire de ce point par rapport à S. De même pour la surface T. Si les quatre points de contact sont en ligne droite, la droite est l'intersection des deux plans polaires.

2° Soient x, y, z, u les coordonnées homogènes du point M assujetti à décrire la droite

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + Du_1 = 0, \quad A'x_1 + B'y_1 + C'z_1 + D'u_1 = 0.$$

Les équations de D seront

$$x_1 \frac{dS}{dx} + y_1 \frac{dS}{dy} + z_1 \frac{dS}{dz} + u_1 \frac{dS}{du} = 0,$$
$$x_1 \frac{dT}{dx} + y_1 \frac{dT}{dy} + z_1 \frac{dT}{dz} + u_1 \frac{dT}{du} = 0.$$

Si l'on élimine x, y, z, u entre ces quatre équations, on a

$$\begin{vmatrix} \frac{dS}{dx} & \frac{dS}{dy} & \frac{dS}{dz} & \frac{dS}{du} \\ \frac{dT}{dx} & \frac{dT}{dy} & \frac{dT}{dz} & \frac{dT}{du} \\ A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{vmatrix} = 0;$$

c'est une surface du second ordre.

Les sommets du tétraèdre conjugué sont déterminés par les équations

$$\frac{\frac{dS}{dx}}{\frac{dT}{dx}} = \frac{\frac{dS}{dy}}{\frac{dT}{dy}} = \frac{\frac{dS}{dz}}{\frac{dT}{dz}} = \frac{\frac{dS}{du}}{\frac{dT}{du}}.$$

Soit k la valeur commune de ces rapports. Si l'on substitue dans le déterminant $k\frac{dT}{dx}$ à $\frac{dS}{dx}$, $k\frac{dT}{dy}$ à $\frac{dS}{dy}$, ..., on

voit qu'il a, abstraction faite du coefficient k, deux rangées identiques. Il est donc nul. Les quatre sommets du tétraèdre sont sur la surface.

3° Soient $Ax + By + Cz + Du = 0$ le plan fixe dans lequel se meut la droite D; x, y, z, u les coordonnées du point M. Les équations de D peuvent s'écrire

$$x\frac{dS}{dx_1} + y\frac{dS}{dy_1} + z\frac{dS}{dz_1} + u\frac{dS}{du_1} = 0,$$

$$x\frac{dT}{dx_1} + y\frac{dT}{dy_1} + z\frac{dT}{dz_1} + u\frac{dT}{du_1} = 0.$$

Tout plan passant par cette droite a une équation de la forme

$$x\left(\frac{dS}{dx_1} + \lambda\frac{dT}{dx_1}\right) + \ldots = 0.$$

Pour que ce plan soit le plan fixe, on doit avoir

$$(1)\quad \frac{\frac{dS}{dx_1} + \lambda\frac{dT}{dx_1}}{A} = \frac{\frac{dS}{dy_1} + \lambda\frac{dT}{dy_1}}{B} = \frac{\frac{dS}{dz_1} + \lambda\frac{dT}{dz_1}}{C} = \frac{\frac{dS}{du_1} + \lambda\frac{dT}{du_1}}{D}.$$

On reconnaît facilement que l'élimination de λ entre ces trois équations donnerait deux surfaces du second ordre. On peut voir, en outre, sans effectuer l'élimination, que ces deux surfaces ont une droite commune : c'est la droite qui unit les pôles du plan fixe par rapport à S et à T. Soient, en effet, (x', y', z', u'), (x'', y'', z'', u'') ces deux pôles. Ils sont donnés par les équations

$$\frac{\frac{dS}{dx'}}{A} = \frac{\frac{dS}{dy'}}{B} = \ldots, \qquad \frac{\frac{dT}{dx''}}{A} = \frac{\frac{dT}{dy''}}{B} = \ldots.$$

On voit immédiatement que les équations (1) sont satis-

faites, quel que soit λ. Les deux pôles appartiennent tous deux aux deux surfaces que représentent les équations (1). Il en est de même de tout point de la droite qui les joint. Soit, en effet, (x, y, z) un point quelconque de cette droite; on a

$$\frac{x-x'}{x''-x'} = \frac{y-y'}{y''-y'} = \frac{z-z'}{z''-z'} = \frac{u-u'}{u''-u'};$$

d'où, en appelant μ la valeur commune de ces quatre rapports,

$$x = \mu x'' + x'(1-\mu),$$

et de même pour y, z et u.

Il en résulte

$$\frac{dS}{dx} = \mu \frac{dS}{dx''} + (1-\mu)\frac{dS}{dx'},$$

et trois équations analogues pour y, z et u.

De même pour la surface T. On voit encore que le point (x, y, z, u), quel que soit λ, satisfait aux équations (1); il se trouve sur les deux surfaces qu'elles représentent. L'intersection de ces surfaces se compose d'une droite et d'une cubique gauche. Le point M ne peut se trouver sur la droite; les quatre plans tangents dont il est l'intersection passeraient par cette droite. Or il n'existe qu'un *seul* système de quatre pareils plans dont les quatre points de contact d'ailleurs ne sont pas, en général, sur une même droite. Le point M décrit donc la cubique gauche.

Note. — Cette question a aussi été résolue par M. Moret-Blanc, professeur au lycée du Havre.

Questions 1059, 1060, 1061 (Lionnet);

(voir 1e série, t XI, p. 95);

PAR M. V.-A. LE BESGUE.

1. Dans les équations qui suivent, les expressions $\frac{x^2+x}{2}$, x^2 supposent x nul ou entier positif. La formule $\frac{x^2+x}{2}$ prend ainsi les valeurs

$$0,\quad 1,\quad 3,\quad 6,\quad 10,\ldots;$$

ce sont les nombres triangulaires.

La formule x^2 donne les valeurs

$$0,\quad 1,\quad 4,\quad 9,\ldots;$$

ce sont les carrés.

Si l'on regardait les nombres triangulaires comme les sommes

$$1+2+3+\ldots+x=\frac{(x+1)x}{2}$$

et les nombres carrés comme les sommes

$$1+3+5+\ldots+(2x-1)=\frac{2x.x}{2}=x^2,$$

on ne verrait plus comment zéro peut être indifféremment nombre triangulaire ou nombre carré, puisque, dans le premier membre des équations précédentes, x n'est pas nul.

Pour ce qui suit, il faut admettre que 0 et 1 sont indifféremment nombres triangulaires ou carrés. Il suffira donc de considérer les formules $\frac{x^2+x}{2}$, x^2, qui représentent les nombres triangulaires et les carrés.

2. Si n est un entier quelconque, les questions 1059,

1060, 1061 donnent les trois équations

$$(a) \quad \begin{cases} n = x^2 + \dfrac{y^2+y}{2} + \dfrac{z^2+z}{2} & \text{(Q. 1059)}, \\ n = t^2 + u^2 + \dfrac{v^2+v}{2} & \text{(Q. 1060)}, \\ 2n+1 = q^2 + r^2 + s^2 + (s+1)^2 & \text{(Q. 1061)}. \end{cases}$$

Ces équations conduisent immédiatement aux suivantes :

$$(b) \quad \begin{cases} 4n+1 = 4x^2 + (y+z+1)^2 + (y-z)^2, \\ 8n+1 = 4(t+u)^2 + 4(t-u)^2 + (2v+1)^2, \\ 4n+1 = (q+r)^2 + (q-r)^2 + (2s+1)^2. \end{cases}$$

On a donc deux décompositions de $4n+1$ en trois carrés et une de $8n+1$ en trois carrés. Or la *Théorie des nombres* de Legendre (3e édit., n° 317) apprend que ces décompositions sont possibles; il suffit donc de prouver qu'elles peuvent prendre les formes (b) pour que l'on puisse en conclure l'exactitude des équations (a).

3. Quand on décompose $4n+1$ en trois carrés, il y en a nécessairement deux pairs et un impair. Soit

$$4n+1 = 4q_1^2 + 4r_1^2 + (2s+1)^2;$$

il en résulte

$$4n+2 = 4q_1^2 + 4r_1^2 + 4s^2 + 4s + 2,$$

ou

$$2n+1 = 2(q_1^2 + r_1^2) + 2s^2 + 2s + 1,$$
$$2n+1 = (q_1+r_1)^2 + (q_1-r_1)^2 + s^2 + (s+1)^2,$$

ce qui, en posant $q_1 + r_1 = q$, $q_1 - r_1 = r$, donne précisément la troisième équation (a).

4. Pour avoir la première équation (a), il faudra prendre

$$4n+1 = 4x^2 + y_1^2 + z_1^2.$$

Comme l'un des nombres y_1, z_1 est pair et l'autre impair, on peut poser, en admettant $y_1 > z_1$,

$$\left.\begin{array}{l} y_1 + z_1 = 2y + 1, \\ y_1 - z_1 = 2z + 1, \end{array}\right\} \text{ d'où } \left\{\begin{array}{l} y_1 = y + z + 1, \\ z_1 = y - z, \end{array}\right.$$

$$4n + 1 = 4x^2 + (y + z + 1)^2 + (y - z)^2.$$

C'est la première équation (b) qui entraîne la première équation (a).

5. La décomposition de $8n + 1$ en trois carrés dont un seul est impair a nécessairement la forme

$$8n + 1 = 4t_1^2 + 4u_1^2 + (2v + 1)^2,$$

où $t_1^2 + u_1^2$ est nécessairement pair; d'où il résulte que $t_1 + u_1$ et $t_1 - u_1$ le sont également, car on a

$$n = \frac{t_1^2 + u_1^2}{2} + \frac{v^2 + v}{2},$$

ou

$$n = \left(\frac{t_1 + u_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{t_1 - u_1}{2}\right)^2 + \frac{v^2 + v}{2}.$$

Si l'on fait $t_1 + u_1 = 2t$, $t_1 - u_1 = 2u$, on aura précisément la deuxième équation (a).

6. Dans les exemples numériques, on verra s'introduire 1 et 0, pouvant être considérés comme carrés, ou comme nombres triangulaires.

Soit

1° $$11 = 1 + 1 + 9.$$

Dans le second membre, on peut prendre $1 + 1$ comme deux nombres triangulaires, ou comme un carré et un nombre triangulaire.

Soit

2° $$2.5 + 1 = 11 = 0 + 1 + 1 + 9.$$

11 est décomposé en quatre carrés, dont deux (0 et 1) sont consécutifs. Ainsi les trois équations (a) se trouvent vérifiées.

Nota. — Il serait important de donner des démonstrations directes des équations (a), car on simplifierait ainsi la théorie de la décomposition des nombres en trois carrés, ce qui est l'objet de la troisième Partie de la *Théorie des nombres* de Legendre.

Note. — MM. Brocard et Moret-Blanc ont résolu de même ces trois questions.

Question 1079

(voir 2e série, t. XI, p. 192);

PAR M. MORET-BLANC.

Montrer que, pour toute valeur entière et positive du nombre m, la suite terminée

$$\frac{2}{1}m - \frac{2}{1}\frac{2}{3}m(m-1) + \frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{2}{5}m(m-1)(m-2)$$
$$- \frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{2}{5}\frac{2}{7}m(m-1)(m-2)(m-3) + \ldots$$

a pour valeur

$$\frac{2m}{2m-1}.$$

(HATON DE LA GOUPILLIÈRE.)

L'égalité à démontrer peut s'écrire, en multipliant ses deux membres par $\frac{2m-1}{2m}$,

$$\frac{2m-1}{1} - \frac{(2m-1)(2m-2)}{1.3} + \frac{(2m-1)(2m-2)(2m-4)}{1.3.5}$$
$$- \frac{(2m-1)(2m-2)(2m-4)(2m-6)}{1.3.5.7} + \ldots = 1,$$

ou

$$\frac{(2m-2)}{1}-\frac{(2m-1)(2m-2)}{1.3}+\frac{(2m-1)(2m-2)(2m-4)}{1.3.5}$$
$$-\frac{(2m-1)(2m-2)(2m-4)(2m-6)}{1.3.5.7}+\ldots=0,$$

égalité qui, par l'addition successive des différents termes, devient

$$\frac{(2m-2)(2m-4)(2m-6)\ldots(2m-2n)}{1.3.5\ldots(2n-1)}=0,$$

ou simplement

$$(2m-2)(2m-4)(2m-6)\ldots(2m-2n)=0.$$

Elle est évidemment satisfaite par toutes les valeurs entières et positives de m, depuis 1 jusqu'à n, quelque grand que soit n, ce qui démontre le théorème.

Note. — Autres solutions de MM. Gambey, Mister, Le Paige, de Virieu, Lenglet.

Question 1080

(voir même tome, p. 192);

PAR UN ABONNÉ.

Montrer que, pour toutes les valeurs entières et positives des deux nombres m et n, la suite terminée

$$\frac{1}{m}-\frac{n}{1}\frac{1}{m+1}+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{1}{m+2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\frac{1}{m+3}$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}\frac{1}{m+4}-\ldots$$

a pour valeur

$$\frac{1.2.3.4\ldots(m-1)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}.$$

(HATON DE LA GOUPILLIÈRE.)

Posons

$$u = \frac{1.2.3\ldots(m-1)}{(p+1)(p+2)\ldots(p+m)},$$

nous aurons, en y faisant successivement $p=0$, $p=1,\ldots$, $p=n$,

$$u_0 = \frac{1}{m}, \quad u_1 = \frac{1}{m(m+1)}, \ldots, \quad u_n = \frac{1.2\ldots n}{m(m+1)\ldots(m+n)}.$$

On tire de là

$$u_{p+1} - u_p = \Delta u_p = -\frac{1.2.3\ldots p}{(m+1)(m+2)\ldots(m+p+1)},$$

c'est-à-dire que, au signe près, on passe de u_p à Δu_p en changeant m en $m+1$. On passera donc de u_p à $\Delta^2 u_p$ en changeant m en $m+2$, et, en général, de u_p à $\Delta^n u_p$ en changeant m en $m+n$. Faisons $p=0$, nous aurons

$$\Delta^n u_0 = \pm \frac{1}{m+n},$$

et, en appliquant la formule de la théorie des différences qui donne u_n en fonction de u_0, et de ses différences successives

$$u_n = u_0 + \frac{n}{1}\Delta u_0 + \frac{n(n.1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \ldots,$$

on trouve la formule proposée.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc, Mister, Lenglet, Brocard, de Virieu, Le Paige.

CORRESPONDANCE.

Nous avons reçu de M. Gambey une solution de la question de mathématiques proposée au concours d'agrégation de 1872. Cette solution nous est parvenue trop tard pour qu'il ait été possible d'en faire mention dans le numéro d'octobre.

M. Pellissier démontre, par un calcul très-simple, que, *si deux ellipses de même centre, et dont les axes sont dirigés suivant les mêmes droites, ont une aire égale, les angles excentriques à un point commun sont complémentaires.*

Il faut, par conséquent, dans l'énoncé de la question 1018 (2ᵉ série, t. X, p. 191), au lieu de *supplémentaires,* lire *complémentaires.*

M. Mister remarque que la question 573 (t. XX, p. 112) est énoncée d'une manière inexacte.

Cette question est ainsi posée :

Soit la fraction continue

$$\sqrt{n} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{2c + \cfrac{1}{b + \sqrt{n}}}}.$$

Faisons

$$a + \frac{1}{b} = \mathrm{M}, \quad a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}} = \mathrm{N},$$

on a

$$\mathrm{MN} = n.$$

Or « on sait que la racine carrée d'un nombre rationnel, entier ou fractionnaire, non carré parfait, s'ex-

prime par une fraction continue périodique mixte, dont la période est précédée d'un seul quotient incomplet; que le dernier quotient incomplet de la partie périodique est double du quotient incomplet qui précède la période, et qu'enfin le premier et l'avant-dernier quotient incomplets de la période sont égaux, et qu'il en est de même de deux quotients incomplets quelconques à égale distance de ceux-là (*). »

En supposant donc que n représente un nombre rationnel, non carré parfait, et a, b, c des nombres entiers, on aura $b = a$, $2c = a$. Et de là M. Mister conclut facilement que l'égalité $\mathrm{MN} = n$ n'a pas lieu.

M. Niewenglouski trouve que « le théorème démontré p. 474, 1°, peut être énoncé de la façon suivante : « Si » aux points où une tangente quelconque à une conique » à centre rencontre les deux tangentes menées par les » extrémités d'un axe, on mène à cette tangente deux » circonférences tangentes ayant leurs centres sur l'axe » considéré, les deux circonférences auront pour points » communs les deux foyers réels ou imaginaires situés » sur l'autre axe. Si la tangente se meut, on obtient deux » séries de cercles; les cercles de chaque série ont le » même axe radical; les points limites d'une série sont » les foyers par lesquels passent les cercles de l'autre » série. »

M. Auguste Morel, répétiteur à Sainte-Barbe, en nous adressant une solution de la question 1097, rectifie ainsi

(*) M. Mister ajoute : « Ce théorème, dû à Lefrançois, se trouve démontré dans les *Bulletins de l'Académie de Belgique*, et dans le *Cours d'Algèbre supérieure* de M. J.-A. Serret, t. I, p. 55, pour n entier. »

Il serait plus exact de dire que ce théorème est dû à Lagrange. Nous en avons donné la démonstration dans les *Nouvelles Annales*, 1re série, t. I, p. 19 et 20. La réduction de la racine carrée d'un nombre en fraction continue périodique a été indiquée, sans démonstration, par Euler (t. XI des *Nouveaux Commentaires de Pétersbourg*). (G.)

l'énoncé de cette question : « *Démontrer que l'angle* IOC *a pour mesure la demi-somme ou la demi-différence des arcs* E'A, F'A. »

M. G. Launoy, professeur au collége de Tournon, nous communique quelques observations très-judicieuses sur la théorie élémentaire des maxima et minima, dont il s'est agi p. 478. D'autre part, et sur le même sujet, M. Niewenglouski nous écrit :

« ... J'ai parlé des *Traités d'Algèbre* (*voir* p. 478), mais j'ai oublié les *Cours*; or, dans son excellent cours au lycée Bonaparte, aujourd'hui Condorcet, mon ancien professeur, M. Ventéjol, démontre, à l'aide d'une courbe, que tous les maxima et minima de y liés à x par l'équation

$$x = ay + b \pm \sqrt{my^2 + ny + p},$$

fournis par la méthode élémentaire, satisfont à la définition des maxima et minima, et que la même méthode fournit tous les maxima et minima.

» Il n'y a pas grande différence avec ce que je vous ai envoyé. Probablement le Cours de M. Ventéjol était resté gravé, plus que je ne le pensais, dans ma mémoire; car, sans m'en douter, je n'ai fait que copier, avec une légère généralisation et une autre démonstration. »

BIBLIOGRAPHIE.

Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche, pubblicato da *B. Boncompagni,* socio ordinario dell' Accademia pontificia de' Nuovi Lincei, socio corrispondente dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna, delle R. Acca-

demie delle Scienze di Torino, e di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, e socio onorario della R. Accademia delle Scienze di Berlino.

Les derniers cahiers de cette très-intéressante publication contiennent les articles suivants :

Octobre 1871. — Des savants arabes et des savants d'aujourd'hui, à propos de quelques rectifications. Lettre de M. *Sédillot* à *D.-B. Boncompagni.*

Novembre. — Victorii calculus ex Codice Vaticano, editus a Godofredo Friedlein.

Quelques mots de réponse à M. *Sédillot*, par *Th.-Henri Martin.*

Ptolémée, auteur de l'*Optique* traduite en latin par *Ammiratus Eugenius Siculus* sur une traduction arabe incomplète, est-il le même que Claude Ptolémée, auteur de l'*Almageste?* — *Th.-Henri Martin.*

Intorno ad una traduzione latina dell' *Ottica* di *Tolomeo.* Nota di *B. Boncompagni.*

Décembre. — Intorno ad un Comento di Benedetto Vittori, Medico Faentino, al Tractatus proportionum di *Alberto di Sassonia.* — *Ferdinando Jacoli.*

Intorno al Tractatus proportionum di *Alberto di Sassonia.* — *B. Boncompagni.*

Giunte e correzioni allo Scritto intitolato : Intorno alle definizioni di Erone Alessandrino. — *B. Boncompagni.*

Janvier 1872. — Euclide e il suo secolo. Saggio storico-matematico di *Maurizio Cantor.* Traduzione di *G.-B. Biadego.*

Février. — Euclide e il suo secolo. Saggio storico-matematico di *Maurizio Cantor.* Traduzione di *G.-B. Biadego.* (Fine.) Note del traduttore.

Mars. — Hypothèse astronomique de *Pythagore*, par *Th.-Henri Martin.*

Avril. — Hypothèse astronomique de *Philolaüs*, par *Th.-Henri Martin.*

Annonces de publications récentes.

MANUEL GÉNÉRAL DE L'INSTRUCTION PRIMAIRE, journal hebdomadaire des Instituteurs et des Institutrices.

Dans le numéro du 5 octobre de ce journal, on lit :

« M. L. Castelnau, officier d'Académie, professeur de mathématiques théoriques et appliquées, vient de mettre à la disposition des élèves qui commencent l'étude de la Géométrie un instrument très-simple et très-utile, que nous nommerons le *double décimètre rapporteur.*

» Au moyen des perfectionnements apportés par M. Castelnau, le double décimètre est devenu, pour les constructions élémentaires, un nouvel instrument de précision présentant à lui seul les mêmes usages que la règle, l'équerre, le T et le rapporteur.

» On peut, à l'aide de l'instrument, tracer correctement des lignes droites, mener par un point donné une perpendiculaire ou une parallèle à une droite donnée, et mener, sans erreur sensible, une oblique qui fasse avec une droite donnée un angle dont la graduation est donnée.

» Nous pensons que M. L. Castelnau a rendu service à l'enseignement élémentaire en facilitant, particulièrement pour les commençants, l'habitude d'un tracé précis des figures, et en disposant de bonne heure les élèves à accorder aux applications le genre d'intérêt qu'elles méritent.

» Aussi est-ce avec la plus entière confiance que nous croyons devoir recommander à MM. les instituteurs ce nouveau double décimètre, dont les avantages sont déjà appréciés par plusieurs professeurs.

» F. LORÉLUT,
» Ancien professeur de Mathématiques
au collége Stanislas. »

Ajoutons que le soin tout particulier avec lequel ce double décimètre a été construit en fait un instrument d'une grande utilité pour le tracé des épures, et qui peut, par cela même, être recommandé à tous les candidats aux écoles du Gouvernement. (G.)

QUESTIONS.

1101. a et b étant les demi-axes d'une ellipse, soient décrits deux cercles concentriques à cette courbe, ayant respectivement pour rayons $a+b$ et $a-b$. Si d'un point quelconque de l'un d'eux on mène deux tangentes à l'ellipse, les normales à cette courbe aux deux points de contact se rencontreront sur l'autre cercle.

(Joseph Bruno.)

1102. Démontrer l'égalité

$$\sum_{p=0}^{p=n}(-1)^p 2^p \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1.2\ldots p} = \begin{cases} 0 & \text{pour } n \text{ impair.} \\ \dfrac{1}{n+1} & \text{pour } n \text{ pair.} \end{cases}$$

(C. de Polignac.)

1103. Si a, b, c désignent les sommets d'un triangle et a', b', c' les traces, sur les côtés opposés, des polaires de ces sommets par rapport à une conique, les cercles décrits sur aa', bb', cc' comme diamètres se coupent aux mêmes points. (H. Faure.)

1104. Trois droites issues d'un même point m, et passant par les sommets a, b, c d'un triangle, rencontrent les côtés opposés aux points a', b', c'. Le cercle orthogonal aux cercles décrits sur aa', bb', cc' comme diamètres passe par deux points fixes, quel que soit le point m. Déterminer ces deux points.

(H. Faure.)

1105. 1° Trouver l'équation des courbes qui rencontrent sous un angle constant tous les segments décrits sur une même corde.

2° Même problème pour les hyperboles équilatères concentriques qui passent par un point fixe.

3° Même problème pour les ellipses homofocales.

4° Même problème pour les cassiniennes homofocales, c'est-à-dire les courbes telles que le produit des distances de chaque point aux n sommets d'un polygone régulier reste constant.

(HATON DE LA GOUPILLIÈRE.)

1106. Dans un paraboloïde hyperbolique, la génératrice de chaque système qui passe par le sommet est celle sur laquelle les génératrices de l'autre système interceptent les segments les plus petits. (A. TISSOT.)

1107. Le nombre des coniques d'un système (μ_1, ν_1), qui sont osculatrices à des coniques d'un autre système (μ_2, ν_2), est égal à $3(\mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2)$.

(H.-G. ZEUTHEN.)

1108. Combien de coniques d'un système ont un double contact avec des coniques d'un autre système?

(H.-G. ZEUTHEN.)

1109. Par les sommets d'un triangle pris deux à deux, on fait passer trois paraboles ayant un point de contact commun. Les diamètres de ces paraboles qui passent par ce point rencontrent les côtés correspondants du triangle en des points tels, que les droites qui les joignent aux sommets opposés concourent en un même point.

(G. FOURET.)

ERRATUM.

C'est par erreur que nous avons omis de mentionner M. Brocard parmi les personnes ayant résolu les questions 850, 886, 906, 926, 943, 951 et 953.

ÉTUDE D'UN COMPLEXE DU SECOND ORDRE

(suite et fin, voir même tome, p. 481);

PAR M. PAINVIN.

36. *Lieu des points pour lesquels le cône du complexe est de révolution.*

L'équation du cône est (4), n° 4,

$$\begin{aligned} x^2(S_0 + a^2 - x_0^2) + y^2(S_0 + b^2 - y_0^2) + z^2(S_0 + c^2 - z_0^2) \\ - 2y_0z_0yz - 2z_0x_0zx - 2x_0y_0xy \\ + 2Ax_0x + 2By_0y + 2Cz_0z - (Ax_0^2 + By_0^2 + Cz_0^2) = 0. \end{aligned}$$

Si l'on exprime que ce cône est de révolution, on voit immédiatement qu'un des rectangles doit disparaître, ce qui exige qu'une des quantités x_0, y_0, z_0 soit nulle. Prenons $y_0 = 0$, on trouve alors que le sommet du cône doit se trouver sur la courbe

$$y_0 = 0, \quad \frac{x_0^2}{c_1^2} - \frac{z_0^2}{a_1^2} - 1 = 0,$$

et l'axe de ce cône est

$$y = 0, \quad \frac{x_0 x}{c_1^2} - \frac{z_0 z}{a_1^2} - 1 = 0,$$

c'est-à-dire que le sommet du cône est sur une focale de l'ellipsoïde, et l'axe du cône est la tangente à la focale au point où se trouve le sommet. Les génératrices du cône, situées dans le plan principal considéré, seront tangentes à l'ellipse de la surface Δ qui se trouve dans ce plan.

37. *Position des plans pour lesquels la conique* (Γ) *se réduit à un cercle.*

Pour que la conique (Γ) se réduise à un cercle, il faut et il suffit que les valeurs de ρ^2 fournies par l'équation (42), n° 19, soient égales; on est ainsi conduit à l'équation de condition

$$(e\mathfrak{S}_0+\mathfrak{H}_0-1)^2-4(\mathfrak{S}_0\mathfrak{G}_0-e\mathfrak{S}_0-\mathfrak{H}_0)=0,$$

équation qui peut s'écrire

$$(e\mathfrak{S}_0+\mathfrak{H}_0+1)^2-4\mathfrak{S}_0\mathfrak{G}_0=0,$$

ou, en remplaçant $\mathfrak{S}_0$, $\mathfrak{G}_0$, $\mathfrak{H}_0$ par leurs valeurs, et développant,

$$a_1^4u_0^4+b_1^4v_0^4+c_1^4w_0^4-2b_1^2c_1^2v_0^2w_0^2-2c_1^2a_1^2u_0^2w_0^2-2a_1^2b_1^2u_0^2v_0^2=0,$$

ce qu'on peut écrire définitivement sous la forme suivante :

$$(66)\quad \left\{\begin{array}{l}(a_1u+b_1v+c_1w)(-a_1u+b_1v+c_1w)\\ \quad\times(a_1u-b_1v+c_1w)(a_1u+b_1v-c_1w)=0.\end{array}\right.$$

Comme on a, d'après les hypothèses faites, $a_1^2>0$, $b_1^2<0$, $c_1^2>0$, on voit que les points définis par l'équation (66) sont imaginaires, tant que v n'est pas nul.

Donc les plans réels, pour lesquels la conique (Γ) se réduit à un cercle, passent par l'une ou l'autre des deux droites

$$(67)\quad \left\{\begin{array}{lll}(1^\circ) & v=0, & a_1u+c_1w=0,\\ (2^\circ) & v=0, & a_1u-c_1w=0.\end{array}\right.$$

Si nous considérons la droite (1°) par exemple, elle est définie par deux points, dont le premier, $v=0$, est à l'infini sur Oy, et dont le second est à l'infini sur la direction $\frac{x}{a_1}=\frac{z}{c_1}$, laquelle est perpendiculaire à une des asymptotes de l'hyperbole focale.

Ainsi les plans réels pour lesquels la conique (Γ) se

réduit à un cercle sont les plans perpendiculaires aux asymptotes de l'hyperbole focale située dans le plan zOx, et, d'après le théorème VI, n° 15, le centre du cercle est précisément le point de rencontre du plan avec l'asymptote.

Si l'on prend, par exemple, $v_0 = 0$, $a_1 u_0 = c_1 w_0$, l'équation du plan sécant sera

$$(1^\circ) \quad c_1 x + a_1 z = \mu, \quad \text{d'où} \quad u_0 = \frac{c_1}{\mu}, \quad v_0 = 0, \quad w_0 = \frac{a_1}{\mu};$$

l'équation (42), n° 19, donne alors pour le rayon ρ^2 du cercle

$$(2^\circ) \qquad \rho^2 = \mathrm{B} + \frac{\mu^2}{b_1^2}.$$

Comme b_1^2 est négatif, on voit que le rayon de ce cercle sera toujours inférieur à celui du cercle de la surface Δ situé dans le plan zOx; pour que le cercle soit réel, il faut que

$$(3^\circ) \qquad \mu < \sqrt{\mathrm{B}}\sqrt{-b_1^2},$$

et le plan limite a pour équation

$$(\tau\tau) \quad (68) \qquad c_1 x + a_1 z = \sqrt{\mathrm{B}}\sqrt{-b_1^2}.$$

Cette dernière droite est la tangente commune à l'ellipse et au cercle de la surface Δ; le plan (68) est donc un plan tangent double; le rayon du cercle correspondant est nul; son centre est le pied de la perpendiculaire abaissée du centre O sur la droite (68).

Quant au rayon ρ^2 (2°), on voit facilement qu'il est égal à la moitié de la corde interceptée, sur la trace du plan sécant, par le cercle de la surface Δ.

On a donc la proposition :

Théorème XIII. — *Le lieu des points pour lesquels*

les cônes du complexe sont des cônes RÉELS *de révolution est l'hyperbole focale de l'ellipsoïde donné, située dans le plan* zOx *perpendiculaire à l'axe moyen. L'axe du cône est la tangente à l'hyperbole focale au point où se trouve le sommet; les génératrices, situées dans le plan* zOx*, sont tangentes à l'ellipse de la surface* Δ *qui se trouve dans le même plan. Le cône devient imaginaire quand le sommet pénètre dans l'intérieur de cette ellipse.*

Les plans RÉELS Π, *pour lesquels les coniques* (Γ) *du complexe sont des cercles, sont des plans perpendiculaires aux asymptotes de l'hyperbole focale, et les centres de ces cercles sont sur ces asymptotes. Les cercles cessent d'être réels, lorsque la trace du plan* Π *se trouve au delà de la tangente commune au cercle et à l'ellipse de la surface* Δ *situés dans le plan* zOx*. Lorsque le cercle est réel, son diamètre est la portion de la trace du plan* Π *interceptée par le cercle de la surface* Δ.

38. *Position des points pour lesquels le cône du complexe se réduit à deux plans coïncidents.*

Dans ce cas, l'équation (16) ou (16 *bis*), n° 6, doit admettre deux racines nulles, c'est-à-dire que deux des quantités σ_1, σ_2, σ_3 doivent être nulles; mais la quantité σ_1, qui est la somme de deux quantités négatives, ne peut être nulle (il est entendu que nous ne nous occupons que des solutions réelles); on doit donc avoir

$$\sigma_2 = 0 \quad \text{et} \quad \sigma_3 = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \rho_1 + \rho_3 = 0, \quad \rho_1 + \rho_2 = 0.$$

Les inégalités (14), n° 5, nous montrent que les quantités ρ_2 et ρ_3, qui doivent être égales et de même signe, sont alors égales à la limite commune $-b^2$ qui les sépare.

On a donc

$$(69)\qquad \rho_2 = \rho_3 = -b^2, \quad \rho_1 = b^2;$$

les équations (11) et (12) du n° 5 donnent, d'après cela,

$$(69\ bis)\qquad \begin{cases} S_0 = -b^2, & G_0 = b^4, \quad H_0 = b^6, \\ x_0^2 = -\dfrac{Cc_1^2}{b_1^2}, & y_0 = 0, \quad z_0^2 = -\dfrac{Aa_1^2}{b_1^2}. \end{cases}$$

Si l'on considère le point (dont les coordonnées sont positives), savoir :

$$x_0 = \frac{c_1\sqrt{C}}{\sqrt{-b_1^2}}, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = \frac{a_1\sqrt{A}}{\sqrt{-b_1^2}},$$

l'équation (15) du cône (C), ayant son sommet en ce point, devient

$$(70)\qquad \left(\frac{c_1 x}{\sqrt{C}} + \frac{a_1 z}{\sqrt{A}} - \sqrt{-b_1^2}\right)^2 = 0,$$

ou

$$\frac{c_1 x}{\sqrt{C}} + \frac{a_1 z}{\sqrt{A}} - \sqrt{-b_1^2} = 0.$$

La surface Δ a *seize points doubles :* quatre sont réels, huit sont imaginaires et quatre sont à l'infini. Les calculs précédents nous montrent que les points pour lesquels le cône *réel* du complexe se réduit à deux plans coïncidents sont précisément les points doubles réels de la surface Δ. On voit, par les formules du n° 35, que ces points doubles sont les intersections du cercle et de l'ellipse appartenant à la surface Δ, et situés dans le plan zOx. Quant au *plan* Π_d *du complexe,* il est perpendiculaire au plan zOx, et sa trace est tangente, au point double D, à l'ellipse de la surface Δ. Toutes les droites qui passent par le point D sont situées dans le plan unique Π_d.

Les coordonnées du plan Π_d ou (70) sont

$$(70\ bis)\quad (\Pi_d)\quad u_0 = \frac{c_1}{\sqrt{C}\sqrt{-b_1^2}},\quad v_0 = 0,\quad w_0 = \frac{a_1}{\sqrt{A}\sqrt{-b_1^2}};$$

l'équation (34), n° 15, donne alors pour la conique Γ_d, correspondant au plan Π_d,

$$(71)\quad (\Gamma_d)\quad \left\{ \begin{array}{l} (c_1\sqrt{C}u + a_1\sqrt{A}w - \sqrt{-b_1^2}) \\ \quad \times (c^2 c_1\sqrt{C}u + a^2 a_1\sqrt{A}w - b^2\sqrt{-b_1^2}) = 0, \end{array} \right.$$

ou

$$(71\ bis)\quad \left\{ \begin{array}{lll} x_0 = \dfrac{c_1\sqrt{C}}{\sqrt{-b_1^2}}, & y_0 = 0, & z = \dfrac{a_1\sqrt{A}}{\sqrt{-b_1^2}}, \\ x'_0 = \dfrac{c^2 c_1\sqrt{C}}{b^2\sqrt{-b_1^2}}, & y'_0 = 0, & z'_0 = \dfrac{a^2 a_1\sqrt{A}}{b^2\sqrt{-b_1^2}}; \end{array} \right.$$

ces deux points sont les points D et D′, où la tangente en D à l'ellipse rencontre le cercle. Ces résultats sont une conséquence immédiate du théorème IX.

Si l'on considère un point quelconque du plan Π_d, le cône correspondant du complexe sera coupé suivant deux droites réelles passant par D et D′; quand son sommet se trouve sur DD′, le cône est touché par le plan Π_d suivant la droite DD′; si le sommet vient en D′, le cône se réduit à deux plans réels, dont un est le plan Π_d, et l'autre, perpendiculaire à zOx, a sa trace tangente à l'ellipse; enfin, quand le sommet est en D, le cône se réduit à deux plans confondus avec Π_d.

39. Nous avons dit que le point D était un point double de la surface Δ; ajoutons que c'est un *point double conique*. En effet, les coordonnées du point D sont

$$x_0 = \frac{c_1\sqrt{C}}{\sqrt{-b_1^2}},\quad y_0 = 0,\quad z_0 = \frac{a_1\sqrt{A}}{\sqrt{-b_1^2}};$$

transportons en ce point l'origine des coordonnées, l'équation (21 *ter*), n° 8, de la surface Δ devient

$$(72)\quad\left\{\begin{aligned} &(x'^2+y'^2+z'^2)(Ax'^2+By'^2+Cz'^2)\\ &+\frac{2}{\sqrt{-b_1^2}}\Big[(c_1\sqrt{C}x'+a_1\sqrt{A}z')(Ax'^2+By'^2+Cz'^2)\\ &\qquad\qquad +\sqrt{A}\sqrt{C}(c_1\sqrt{A}x'+a_1\sqrt{C}z')(x'^2+y'^2+z'^2)\Big]\\ &-\Big[\frac{4\sqrt{A}\sqrt{C}}{b_1^2}(c_1\sqrt{C}x'+a_1\sqrt{A}z')(c_1\sqrt{A}x'+a_1\sqrt{C}z')\\ &\qquad\qquad + a_1^2c_1^2y'^2\Big]=0.\end{aligned}\right.$$

On voit par là que le point D est un point double conique; le cône tangent a pour équation

$$(73)\quad (c_1\sqrt{C}x'+a_1\sqrt{A}z')(c_1\sqrt{A}x'+a_1\sqrt{C}z')+\frac{a_1^2b_1^2c_1^2}{4\sqrt{AC}}y'^2=0;$$

c'est un cône proprement dit, symétrique par rapport au plan zOx, et dont la trace sur ce plan est formée par les tangentes en D à l'ellipse et au cercle de la surface Δ. Le plan Π_d est tangent à ce cône suivant la tangente à l'ellipse. Il est facile de voir que l'intérieur du cône (73) est tourné vers le centre de l'ellipsoïde.

40. *Position des plans* Π *pour lesquels la conique* Γ *se réduit à deux points coïncidents.*

Dans ce cas, l'équation (42), n° 19, doit admettre deux valeurs nulles pour ρ^2; on a donc

$$e\mathfrak{S}_0+\mathfrak{G}_0=1,\qquad \mathfrak{S}_0\mathfrak{G}_0=1.$$

En remplaçant $\mathfrak{S}_0$ par $\frac{1}{\mathfrak{G}_0}$ dans les équations (50), n° 27,

on trouve

$$b_1^2 c_1^2 u_0^2 = -\frac{(\mathcal{G}_0 - A)^2}{\mathcal{G}_0},$$

$$c_1^2 a_1^2 v_0^2 = -\frac{(\mathcal{G}_0 - B)^2}{\mathcal{G}_0},$$

$$a_1^2 b_1^2 w_0^2 = -\frac{(\mathcal{G}_0 - C)^2}{\mathcal{G}_0}.$$

Comme on a $\mathcal{G}_0 > 0$, $a_1^2 > 0$, $b_1^2 < 0$, $c_1^2 > 0$, les seules solutions réelles sont

$$\mathcal{G}_0 = B, \quad s_0 = \frac{1}{B}, \quad \mathfrak{H}_0 = -b^2;$$

d'où il résulte

$$(74) \qquad u_0^2 = \frac{c_1^2}{-b_1^2 B}, \quad v_0^2 = 0, \quad w_0^2 = \frac{a_1^2}{-B b_1^2}.$$

Ce sont les seuls plans *réels* pour lesquels la conique (Γ) se réduit à deux points confondus ; ces plans, au nombre de quatre, sont perpendiculaires au plan zOx, et leurs traces sur ce plan sont les tangentes communes à l'ellipse et au cercle de la surface Δ ; ce sont les plans tangents doubles *réels* de cette surface ; ils sont *curvitangents*.

Considérons, par exemple, le plan

$$(75) \quad (\Pi_\delta) \quad u_0 = \frac{c_1}{\sqrt{B}\sqrt{-b_1^2}}, \quad v_0 = 0, \quad w_0 = \frac{a_1}{\sqrt{B}\sqrt{-b_1^2}},$$

ou

$$(75\ bis) \qquad c_1 x + a_1 z = \sqrt{B}\sqrt{-b_1^2};$$

on trouve, d'après l'équation (34), n° 15, pour la conique correspondante

$$(76) \quad (\Gamma_\delta) \qquad \left(c_1 u + a_1 w - \frac{\sqrt{-b_1^2}}{\sqrt{B}}\right)^2 = 0,$$

ou

$$c_1 u + a_1 w = \frac{\sqrt{-b_1^2}}{\sqrt{B}},$$

ou

$$(76\ bis) \qquad x''_0 = \frac{c_1\sqrt{B}}{\sqrt{-b_1^2}}, \quad y''_0 = 0, \quad z''_0 = \frac{a_1\sqrt{B}}{\sqrt{-b_1^2}};$$

c'est le point de contact a_0 de la tangente double $\tau\tau$ avec le cercle de Δ.

Toutes les droites du complexe situées dans le plan Π_δ passent par le point a_0; par conséquent, les cônes du complexe dont le sommet est un point quelconque du plan Π_δ sont touchés par ce plan suivant la droite qui joint le sommet au point a_0. Quand le sommet se trouve en un des points où la tangente $\tau\tau$ touche l'ellipse et le cercle de Δ, le cône du complexe se réduit à deux plans distincts réels : l'un est le plan Π_δ; l'autre, perpendiculaire à zOx, a sa trace tangente ou au cercle ou à l'ellipse.

Nous avons donc cette proposition :

THÉORÈME XIV. — 1° *Les points pour lesquels les cônes* RÉELS *du complexe se réduisent à deux plans coïncidents sont les quatre points doubles réels de la surface* Δ, *points doubles coniques qui sont les intersections du cercle* (C_0) *et de l'ellipse* (E_0) *appartenant à* Δ *et situés dans le plan* zOx *de l'hyperbole focale de l'ellipsoïde donné.*

Si l'on considère un de ces points, D *par exemple, le plan correspondant* Π_d *du complexe est perpendiculaire au plan* zOx *et touche en* D *l'ellipse* (E_0); *toutes les droites du complexe qui passent par* D *sont situées dans le plan* Π_d. *La conique* (Γ_d) *du complexe, située dans le plan* Π_d, *se réduit à deux points, dont l'un est le point* D *et l'autre est le point* D' *intersection du cercle* C^0

avec la tangente, en D, à l'ellipse E_0. *Le cône du complexe, dont le sommet est en* D', *se réduit à deux plans réels, perpendiculaires à* zOx, *dont les traces sont les tangentes menées du point* D' *à l'ellipse* (E_0).

2° *Les plans pour lesquels la conique du complexe se réduit à deux points coïncidents sont les quatre plans doubles* RÉELS *de la surface* Δ; *ces plans doubles, curvitangents, sont perpendiculaires au plan* zOx, *et leurs traces sont les tangentes communes au cercle* (C_0) *et à l'ellipse* E_0.

Si l'on considère une de ces tangentes, τ *par exemple, le plan* Π_8, *perpendiculaire à* zOx, *ayant* τ *pour trace, et touchant le cercle en* a_0, *aura sa conique* (Γ) *réduite à deux points confondus en* a_0. *Toutes les droites du complexe, situées dans le plan* Π_8, *passent par le point* a_0, *et, par suite, les cônes du complexe, dont le sommet est sur* Π_8, *sont tous touchés par ce plan suivant la droite qui joint le sommet au point* a_0. *Lorsque le sommet du cône se trouve en un des points où la droite* τ *touche l'ellipse ou le cercle, le cône se réduit à deux plans réels perpendiculaires à* zOx; *une des traces est la tangente commune, l'autre est la tangente à l'ellipse ou au cercle, suivant que le point considéré est sur le cercle ou sur l'ellipse.*

41. Cette recherche n'est, pour ainsi dire, qu'une introduction à l'étude des complexes particuliers du second ordre dérivant de la définition géométrique donnée en commençant. Il reste encore de nombreuses questions à aborder sur lesquelles je reviendrai bientôt. Ainsi il reste à étudier la *congruence* formée par les arêtes des systèmes du complexe, les propriétés des pôles et des polaires relativement à ce complexe, etc.; on a aussi à chercher quelles sont les propriétés essentielles qui ca-

ractérisent ce complexe particulier et le différencient des complexes généraux du second ordre, etc. ; on pourrait encore se proposer l'application de la même définition géométrique au cas des hyperboloïdes et des paraboloïdes, en ayant toujours en vue la situation des droites réelles du complexe correspondant, etc., etc.

SUR L'ÉQUATION $Y^2 - (-1)^{\frac{p-1}{2}} pZ^2 = 4X$;

PAR M. ZOLOTAREFF,

Privatdocent à l'Université de Saint-Pétersbourg.

Soient

$$r, \quad r^2, \quad r^3, \ldots, \quad r^{p-1}$$

les $p - 1$ racines de l'équation

$$X = x^{p-1} + x^{p-2} + x^{p-3} + \ldots + x + 1 = \frac{x^p - 1}{x - 1} = 0,$$

p étant un nombre premier, et

$$r = \cos\frac{2\pi}{p} + i \sin\frac{2\pi}{p}.$$

Ces racines, comme on sait, peuvent être distribuées en deux groupes (*) : les racines

$$r, \quad r^{\alpha}, \quad r^{\alpha'}, \ldots,$$

dont les exposants $1, \alpha, \alpha', \ldots$ sont résidus quadratiques par rapport à p, forment le premier groupe, et celles

$$r^{\beta}, \quad r^{\beta'}, \ldots,$$

où $\beta, \beta', \ldots$ sont non-résidus, forment le second groupe. Le nombre des racines dont chaque groupe se compose

(*) *Voir* GAUSS, *Disquisitiones arithmeticæ*, ou SERRET, *Cours d'Algèbre supérieure*; 3e édition.

est égal à $\frac{p-1}{2} = m$. On sait aussi comment, à l'aide de ces groupes, on forme deux fonctions entières, Y et Z, à coefficients entiers, satisfaisant à l'équation

$$Y^2 - (-1)^{\frac{p-1}{2}} pZ^2 = 4X.$$

Quant à ces fonctions Y et Z, Gauss s'exprime comme il suit : « Terminos duos summos functionis Y semper fieri $2x^m + x^{m-1}$, summumque functionis Z x^{m-1} facile perspicietur; coefficientes reliqui autem, qui manifesto omnes erunt integri, variant pro diversa indole numeri p, nec formulæ analyticæ generali subjici possunt. »

Lejeune-Dirichlet (*) généralisa l'équation

$$Y^2 - (-1)^{\frac{p-1}{2}} pZ^2 = 4X$$

pour le cas où p est un nombre composé impair, n'ayant pas de diviseurs carrés plus grands que l'unité.

Dans cette Note, je me propose de démontrer que les polynômes Y et Z se trouvent au moyen des fractions continues. En outre, je donne les équations linéaires d'après lesquelles se trouvent aussi les coefficients de la fonction Z. Nous verrons que, après avoir trouvé la fonction Z, on peut facilement déterminer la fonction Y. Je me suis borné au cas où p est un nombre premier.

Considérons en premier lieu la fonction

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{1}^{p-1} \left(\frac{i}{p}\right) x^i \\ &= \left(\frac{1}{p}\right) x + \left(\frac{2}{p}\right) x^2 + \ldots + \left(\frac{p-1}{p}\right) x^{p-1}, \end{aligned}$$

(*) Voir *Vorlesungen über Zahlentheorie*, §§ 138, 139, 140.

où $\left(\frac{i}{p}\right)$ est le symbole connu de Legendre. On sait que pour les valeurs de x égales à une des racines r^i de l'équation $X = \frac{x^p - 1}{x - 1} = 0$,

$$(1) \qquad S(r^i) = \pm\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}} p}.$$

Quant au signe qu'on doit prendre pour le second membre de cette équation, il doit être le même pour toutes les valeurs de i qui sont résidus quadratiques, et le signe contraire pour les autres valeurs de i. En effet, cela résulte de l'équation connue

$$S(r^i) = \left(\frac{i}{p}\right) S(r).$$

Gauss et Dirichlet ont démontré que c'est le signe $+$ qui correspond aux résidus quadratiques; mais cette détermination du signe n'est pas nécessaire pour l'objet que nous avons en vue.

Développons maintenant $\frac{S(x)}{X}$ en fraction continue et cherchons les fractions convergentes

$$\frac{f_0(x)}{\psi_0(x)}, \quad \frac{f_1(x)}{\psi_1(x)}, \quad \frac{f_2(x)}{\psi_2(x)}, \ldots.$$

Soit

$$\frac{S(x)}{X} = \pm 1 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ldots}};$$

nous aurons

$$\begin{aligned}
f_0(x) &= \pm 1, & \psi_0(x) &= 1,\\
f_1(x) &= \pm q_1 + 1, & \psi_1(x) &= 1,\\
f_2(x) &= f_1(x) q_2 + f_0(x), & \psi_2(x) &= \psi_1(x) q_2 + \psi_0(x),
\end{aligned}$$

et, en général,

$$f_{i+1}(x) = f_i(x)\, q_{i+1} + f_{i-1}(x), \quad \psi_{i+1}(x) = \psi_i(x)\, q_{i+1} + \psi_{i-1}(x).$$

Cela posé, soit $\frac{f_\mu(x)}{\psi_\mu(x)}$ la dernière des fractions convergentes, dont le dénominateur est de degré inférieur à $\frac{p-1}{2} = m$; nous allons établir que la différence

$$S(x)\psi_\mu(x) - f_\mu(x)\,X,$$

que nous désignerons par $\varphi_\mu(x)$, est de degré non supérieur à m. En effet, de nos conventions il résulte

$$(2) \qquad \frac{S(x)}{X} - \frac{f_\mu(x)}{\psi_\mu(x)} = \frac{\varphi_\mu(x)}{X\psi_\mu(x)};$$

mais on sait, par la théorie des fractions continues, que le premier membre de l'équation (2) est de degré non supérieur à celui de la fonction

$$\frac{1}{\psi_\mu(x)\psi_{\mu+1}(x)}.$$

Il s'ensuit que la fonction $\varphi_\mu(x)$ est de degré non supérieur à celui de la fonction

$$\frac{X}{\psi_{\mu+1}(x)},$$

c'est-à-dire non supérieur à m, en vertu de ce que X est de degré $p-1$ et $\psi_{\mu+1}(x)$ de degré non inférieur à $\frac{p-1}{2}$.

En posant dans l'équation

$$S(x)\psi_\mu(x) - X f_\mu(x) = \varphi_\mu(x)$$

successivement

$$x = r, \quad r^2, \ldots, \quad r^i, \ldots, \quad r^{p-1},$$

nous aurons

$$\begin{aligned} S(r)\psi_\mu(r) &= \varphi_\mu(r), \\ S(r^2)\psi_\mu(r^2) &= \varphi_\mu(r^2), \\ &\ldots\ldots\ldots, \\ S(r^i)\psi_\mu(r^i) &= \varphi_\mu(r^i), \\ &\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\begin{aligned} \varphi_\mu(r) &= \pm\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}\,\psi_\mu(r), \\ \varphi_\mu(r^2) &= \pm\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}\,\psi_\mu(r^2), \\ &\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_\mu(r^i) &= \pm\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}\,\psi_\mu(r^i), \\ &\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

où, comme nous avons dit plus haut, on doit prendre le radical $\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}$ avec le même signe pour toutes les valeurs de i qui sont résidus quadratiques, et avec le signe contraire pour les autres valeurs de i.

En désignant par ε l'unité avec le signe qui correspond aux résidus quadratiques, on voit donc que l'équation

$$(3) \qquad \varphi_\mu(x) - \varepsilon\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}\,\psi_\mu(x) = 0$$

admet les racines

$$x = r, \quad x = r^\alpha, \quad x = r^{\alpha'}, \ldots,$$

et l'équation

$$(4) \qquad \varphi_\mu(x) + \varepsilon\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}\,\psi_\mu(x) = 0$$

les racines

$$r^\beta, \quad r^{\beta'}, \ldots.$$

Ainsi les équations (3) et (4) ont chacune au moins m racines. En remarquant, d'un autre côté, que le degré de la fonction $\psi_\mu(x)$ est inférieur à m et que celui de $\varphi_\mu(x)$ ne surpasse pas m, on voit que les équations (3) et (4) ne peuvent admettre chacune plus de m racines; donc elles n'admettent que m racines et le degré de $\varphi_\mu(x)$ est égal par conséquent à m. Il suit de là que la fonction

$$\varphi_\mu(x) - \varepsilon\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}\,\psi_\mu(x)$$

est égale, à un facteur constant près, à celle-ci

$$W = (x-1)(x-r^\alpha)(x-r^{\alpha'})\ldots.$$

En désignant par $\frac{\lambda}{2}$ ce facteur constant, on a

$$2W = \lambda\varphi_\mu(x) - \varepsilon\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}\,\lambda\psi_\mu(x);$$

or, d'un autre côté,

$$2W = Y \pm \sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}\,Z$$

(voir *Disquisitiones arithmeticæ*); donc

$$Y \pm \sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}\,Z = \lambda\varphi_\mu(x) - \varepsilon\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}p}\,\lambda\psi_\mu(x).$$

On détermine la constante λ de telle manière que le premier terme de $\lambda\varphi_\mu(x)$ soit égal à $2x^m$; il s'ensuit que λ est un nombre rationnel, et, par conséquent, on a

$$Y = \lambda\varphi_\mu(x), \quad Z = \pm\lambda\psi_\mu(x).$$

Il résulte de l'équation (2) que $f_\mu(x)$ est le quotient et $\varphi_\mu(x)$ le reste de la division de $S(x)\psi_\mu(x)$ par X; on trouvera donc $\varphi_\mu(x)$, lorsque $\psi_\mu(x)$ sera connu.

Nous allons maintenant déduire les équations linéaires

auxquelles satisfont les coefficients de la fonction $\psi_\mu(x)$. Décomposons à cet effet la fraction $\frac{\varphi_\mu(x)S(x)}{X}$ en fractions simples, après avoir séparé préalablement la partie entière, nous aurons

$$\frac{\psi_\mu(x)S(x)}{X}=f_\mu(x)+\sum\frac{A_i}{x-r^i},$$

où

$$A_i=\frac{\psi_\mu(r^i)S(r^i)}{X'_i},$$

X'_i étant la valeur de la dérivée de X pour $x=r^i$, ou bien

$$\frac{\psi_\mu(x)S(x)}{X}-f_\mu(x)=\frac{\varphi_\mu(x)}{X}=\sum\frac{A_i}{x-r^i}.$$

En remarquant que la fonction $\frac{\varphi_\mu(x)}{X}$ est de degré $-m$, on voit que le développement de la fonction

$$\sum\frac{A_i}{x-r^i},$$

suivant les puissances descendantes de x, ne doit pas contenir les termes

$$x^{-1},\quad x^{-2},\ldots,\quad x^{-m+1};$$

on a donc les conditions

$$(5)\qquad\left\{\begin{array}{l}\Sigma A_i=0,\\ \Sigma r^i\,A_i=0,\\ \Sigma r^{2i}A_i=0,\\ \ldots\ldots\ldots,\\ \Sigma r^{(m-2)i}A_i=0.\end{array}\right.$$

Nous allons maintenant transformer l'expression A_i. On a d'abord

$$X' = \frac{d}{dx}\frac{x^p - 1}{x - 1} = \frac{(p-1)x^p - px^{p-1} + 1}{(x-1)^2},$$

et, par suite, pour $x = r^i$,

$$X'_i = \frac{p(1 - r^{i(p-1)})}{(r^i - 1)^2} = \frac{p}{r^i(r^i - 1)};$$

on a ensuite

(6) $$S(r^i) = \left(\frac{i}{p}\right) S(r)\ldots;$$

ainsi

$$A_i = \frac{S(r)}{p}\left(\frac{i}{p}\right) r^i(r^i - 1)\psi_\mu(r^i).$$

Si l'on remplace dans les équations (5) A_i par sa valeur, elles deviennent

$$\sum\left(\frac{i}{p}\right) r^i\,(r^i - 1)\psi_\mu(r^i) = 0,$$

$$\sum\left(\frac{i}{p}\right) r^{2i}(r^i - 1)\psi_\mu(r^i) = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\sum\left(\frac{i}{p}\right) r^{(m-1)i}(r^i - 1)\psi_\mu(r^i) = 0.$$

En posant

$$\psi_\mu(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_{m-1}x^{m-1},$$

c'est-à-dire

$$\psi_\mu(r^i) = C_0 + C_1 r^i + C_2 r^{2i} + \ldots + C_{m-1} r^{(m-1)i},$$

et ayant égard à la formule (6), on arrive aux équations

$$(7)\quad\begin{cases}\left[\left(\frac{2}{p}\right)-\left(\frac{1}{p}\right)\right]C_0+\left[\left(\frac{3}{p}\right)-\left(\frac{2}{p}\right)\right]C_1+\ldots\\ \qquad\qquad+\left[\left(\frac{m+1}{p}\right)-\left(\frac{m}{p}\right)\right]C_{m-1}=0,\\ \left[\left(\frac{3}{p}\right)-\left(\frac{2}{p}\right)\right]C_0+\left[\left(\frac{4}{p}\right)-\left(\frac{3}{p}\right)\right]C_1+\ldots\\ \qquad\qquad+\left[\left(\frac{m+2}{p}\right)-\left(\frac{m+1}{p}\right)\right]C_{m-1}=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \left[\left(\frac{m}{p}\right)-\left(\frac{m-1}{p}\right)\right]C_0+\left[\left(\frac{m+1}{p}\right)-\left(\frac{m}{p}\right)\right]C_1+\ldots\\ \qquad\qquad+\left[\left(\frac{2m-1}{p}\right)-\left(\frac{2m-2}{p}\right)\right]C_{m-1}=0.\end{cases}$$

On voit, d'après ce qui précède, qu'en supposant $C_{m-1}=1$ et en déterminant les autres coefficients au moyen des équations (7), on a

$$Z=\psi_\mu(x).$$

Voici quelques exemples :

1. $$p=3,\quad m=1,\quad \psi_\mu(x)=1,$$

$$S(x)=\left(\frac{1}{3}\right)x+\left(\frac{2}{3}\right)x^2=x-x^2.$$

Le reste de la division de $S(x)\psi_\mu(x)$ par x^2+x+1 est

$$2x+1;$$

donc

$$\varphi_\mu(x)=Y=2x+1.$$

2. $$p=5,\quad \psi_\mu(x)=C_0+x,$$

35.

où C_0 se détermine par l'équation

$$\left[\left(\frac{2}{5}\right)-\left(\frac{1}{5}\right)\right]C_0+\left[\left(\frac{3}{5}\right)-\left(\frac{2}{5}\right)\right]=0;$$

par conséquent $C_0 = 0$,

$$S(x) = x - x^2 - x^3 + x^4.$$

Le reste de la division de $S(x)\psi_\mu(x)$ par

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

est

$$2x^2 + x + 2;$$

donc, dans ce cas, on aura

$$Y = 2x^2 + x + 2, \quad Z = x.$$

3. $\quad p = 7, \quad m = 3, \quad \psi_\mu(x) = C_0 + C_1 x + x^2,$

où, pour déterminer C_0 et C_1, on a les équations

$$\left[\left(\frac{2}{7}\right)-\left(\frac{1}{7}\right)\right]C_0+\left[\left(\frac{3}{7}\right)-\left(\frac{2}{7}\right)\right]C_1+\left[\left(\frac{4}{7}\right)-\left(\frac{3}{7}\right)\right]=0,$$

$$\left[\left(\frac{3}{7}\right)-\left(\frac{2}{7}\right)\right]C_0+\left[\left(\frac{4}{7}\right)-\left(\frac{3}{7}\right)\right]C_1+\left[\left(\frac{5}{7}\right)-\left(\frac{4}{7}\right)\right]=0,$$

c'est-à-dire les équations

$$-C_1 + 1 = 0, \quad -C_0 + C_1 - 1 = 0,$$

d'où

$$C_0 = 0, \quad C_1 = 1,$$

$$\psi_\mu(x) = x^2 + x = Z, \quad S(x) = x + x^2 - x^3 - x^4 - x^5 - x^6.$$

Le reste de la division de $S(x)\psi_\mu(x)$ par X est

$$2x^3 + x^2 - x - 2;$$

donc

$$Y = 2x^3 + x^2 - x - 2.$$

4. $\quad p = 11, \quad m = 5,$

$$\psi_\mu(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + x^4.$$

Les équations par lesquelles on détermine C_0, C_1, C_2 sont

$$\left[\left(\frac{2}{11}\right)-\left(\frac{1}{11}\right)\right]C_0+\left[\left(\frac{3}{11}\right)-\left(\frac{2}{21}\right)\right]C_1$$
$$+\left[\left(\frac{4}{11}\right)-\left(\frac{3}{11}\right)\right]C_2+\left[\left(\frac{5}{11}\right)-\left(\frac{4}{11}\right)\right]C_3$$
$$+\left[\left(\frac{6}{11}\right)-\left(\frac{5}{11}\right)\right]=0,$$

$$\left[\left(\frac{3}{11}\right)-\left(\frac{2}{11}\right)\right]C_0+\left[\left(\frac{4}{11}\right)-\left(\frac{3}{11}\right)\right]C_1$$
$$+\left[\left(\frac{5}{11}\right)-\left(\frac{4}{11}\right)\right]C_2+\left[\left(\frac{6}{11}\right)-\left(\frac{5}{11}\right)\right]C_3$$
$$+\left[\left(\frac{7}{11}\right)-\left(\frac{6}{11}\right)\right]=0,$$

$$\left[\left(\frac{4}{11}\right)-\left(\frac{3}{11}\right)\right]C_0+\left[\left(\frac{5}{11}\right)-\left(\frac{4}{11}\right)\right]C_1$$
$$+\left[\left(\frac{6}{11}\right)-\left(\frac{5}{11}\right)\right]C_2+\left[\left(\frac{7}{11}\right)-\left(\frac{6}{11}\right)\right]C_3$$
$$+\left[\left(\frac{8}{11}\right)-\left(\frac{7}{11}\right)\right]=0,$$

$$\left[\left(\frac{5}{11}\right)-\left(\frac{4}{11}\right)\right]C_0+\left[\left(\frac{6}{11}\right)-\left(\frac{5}{11}\right)\right]C_1$$
$$+\left[\left(\frac{7}{11}\right)-\left(\frac{6}{11}\right)\right]C_2+\left[\left(\frac{8}{11}\right)-\left(\frac{7}{11}\right)\right]C_3$$
$$+\left[\left(\frac{9}{11}\right)-\left(\frac{8}{11}\right)\right]=0,$$

c'est-à-dire

$$-C_0+C_1-1=0,\quad C_0-C_3=0,\quad -C_2=0,\quad -C_1+1=0,$$

d'où l'on a

$$C_0=0,\quad C_1=0,\quad C_2=0,\quad C_3=0,$$
$$\psi_\mu(x)=x^4+x=Z.$$

Le reste de la division de $\psi_\mu(x)S(x)$ par X sera

$$Y=2x^5+x^4+2x^2-x-2.$$

CONCOURS D'AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES DE 1872.

1re SÉRIE D'ÉPREUVES. — ADMISSIBILITÉ.

Mathématiques spéciales.

(*Voir* l'énoncé de la question, même tome, p. 450.)

Mathématiques élémentaires et Mécanique.

1° Théorie des axes radicaux. Montrer par des applications le caractère et l'importance de cette théorie.

2° On donne une série de circonférences, situées dans un même plan, ayant leurs centres en ligne droite, se touchant extérieurement, de manière que chacune soit tangente à celle qui la précède et à celle qui la suit, et dont les rayons forment une progression géométrique décroissante. On demande le centre de gravité du système supposé prolongé à l'infini.

Question d'Histoire et de Méthode.

Aperçu historique et critique sur l'introduction et sur le rôle des quantités imaginaires en Analyse et en Géométrie.

2e SÉRIE D'ÉPREUVES. — LEÇONS TIRÉES AU SORT.

Mathématiques élémentaires.

1. Rapports, quantités proportionnelles; règles de trois, etc.

2. Année tropique; calendrier.

3. Détermination des centres de gravité des aires planes et des volumes.

4. Maximum et minimum des expressions de la forme $\frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$, etc.

5. Des quantités négatives.

6. Extraction des racines.

7. Mesure du volume engendré par un triangle tournant, etc.; volume de la sphère, etc.

8. Résolution et discussion de l'équation du second degré à une inconnue; des équations qui s'y ramènent.

9. Triangles et polygones sphériques.

10. Pénétration des polyèdres. (Descriptive.)

11. Première leçon sur la mesure des aires planes.

12. Principes de divisibilité; décomposition des nombres en facteurs premiers.

13. Division des nombres entiers, des nombres décimaux.

14. Construction des angles trièdres.

15. Similitude et homothétie dans les figures planes.

16. Formule $\sin(a + b)$,... et autres formules qui s'en déduisent.

Mathématiques spéciales.

1. Sections circulaires des surfaces du second ordre; génération par un cercle.

2. Sections du cône et du cylindre. (Géométrie analytique.)

3. Asymptotes en coordonnées rectilignes.

4. Donner, dans une leçon de résumé, la marche à suivre pour résoudre une équation numérique.

5. Distance d'un point à une droite; plus courte distance de deux droites et perpendiculaire commune; volume d'un tétraèdre. (Géométrie analytique.)

6. Plans tangents aux surfaces de révolution. (Descriptive.)

7. Étude de la fonction exponentielle; logarithmes, etc.

8. Résolution des équations du troisième degré.

9. Réduction de l'équation du second degré à deux variables.

10. Théorème de Sturm.

11. Plans principaux dans les surfaces du second ordre.

12. Intersection des deux coniques; sécantes communes; propriétés immédiates.

13. Recherche des racines commensurables d'une équation.

14. Méthode d'approximation de Newton.

15. Formules générales et construction des courbes en coordonnées polaires.

16. Des séries.

17. Formule de Moivre; résolution de l'équation binôme; polygones réguliers.

3e SÉRIE D'ÉPREUVES. — COMPOSITION ÉCRITE.

Sur les matières de la Licence ès Sciences mathématiques.

1° Déterminer une courbe telle que l'ordonnée y du centre de gravité d'un arc quelconque s à partir d'une origine fixe soit une fonction donnée de la longueur de l'arc, la densité ρ en chaque point étant elle-même une fonction donnée de l'arc. Effectuer les calculs et discuter la courbe en supposant $\rho = \frac{1}{4} s^3$ et $y = s^2$. On pourra examiner, en supposant $\rho = ks^m$ et $y = hs^p$, à quelle condition doivent satisfaire les nombres m et p pour que l'intégration puisse être effectuée.

2° On donne une figure plane homogène et matérielle reposant sur un plan horizontal· elle est liée à un point

fixe O par une tige rigide fixée en l'un de ses points I. Le corps peut avoir un double mouvement autour du point fixe O et autour du point d'articulation I; il reçoit une percussion dans le plan; on demande le mouvement. On fera abstraction de toute résistance passive.

Géométrie descriptive.

Intersection d'un cône oblique et d'une sphère; développement du cône et de cette intersection.

Données particulières. — La sphère a 12 centimètres de diamètre; elle est posée sur le plan horizontal de projection, qu'elle touche en un point A situé sur la ligne de terre. Le cône a pour sommet l'extrémité supérieure du diamètre vertical de la sphère; sa base est un cercle de même rayon que la sphère ayant son centre sur la ligne de terre et dont la circonférence passe par le point A.

Calcul.

Calculer les solutions communes aux deux équations :

$$0,04y^2 - 0,55xy + 1,96x^2 - 2,80y - 0,40x + 1 = 0,$$
$$2,80y^2 + 2,88xy + 2,92x^2 - 8y - 4x + 4 = 0.$$

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1050

(voir 2e série, t. X, p. 557);

PAR M. E. PELLET,

Élève à l'École Normale.

Une corde glisse sur une courbe quelconque, de façon à détacher un segment d'aire constante φ. *Le centre de gravité du segment décrit une courbe* (C), *dont le rayon*

de courbure est proportionnel au cube de la longueur de la corde. (PETERSEN.)

Soient AB, A'B' deux positions de la corde infiniment voisines; leur point de rencontre I se trouve en leur milieu à un infiniment petit près, car les deux triangles AIA', BIB' sont équivalents. Soient s la surface, g et g' les centres de gravité de ces triangles, G le centre de gravité du triangle curviligne A'IB, M et M' les centres de gravité des segments détachés par AB et A'B'.

D'après la théorie du centre de gravité, G, M, g d'une part, et G, M', g' de l'autre, sont en ligne droite, et l'on a

$$\frac{GM}{Gg} = \frac{GM'}{Gg'} = \frac{MM'}{gg'} = \frac{s}{\varphi}.$$

Ainsi MM' est parallèle à la droite gg'; celle-ci tendant vers AB en même temps que A'B', la tangente en M à la courbe (C) est parallèle à AB. De même la tangente en M' est parallèle à A'B'. L'angle de ces deux tangentes est donc égal à l'angle des lignes AB, A'B' que nous désignerons par ε, et l'on a, en désignant par ρ le rayon de courbure de (C) en M,

$$MM' = \rho\varepsilon.$$

D'ailleurs

$$gg' = \frac{2c}{3}, \quad s = \frac{c^2\varepsilon}{8},$$

c désignant la longueur de la corde AB; par suite, la relation

$$\frac{MM'}{gg'} = \frac{s}{\varphi}$$

devient

$$\rho = \frac{c^3}{12\varphi}.$$

Note. — Cette question a été résolue de même par M. Doucet, professeur au lycée de Lyon.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

(TOME XI, 2e SÉRIE.)

Arithmétique et théorie des nombres.

Algèbre.

Géométrie élémentaire.

Géométrie à deux dimensions.

Géométrie à trois dimensions.

Géométrie supérieure.

Géométrie infinitésimale.

Calcul intégral.

Pages.

Analyse combinatoire et calcul des probabilités.

Mécanique.

Ouvrages cités.

Correspondance et Mélanges.

Questions proposées.

Questions résolues.

TABLE DES NOMS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

(TOME XI, 2e SÉRIE.)

